Es: In $\mathbb{R}^4$ si cons i ssv

$V = \{$soluz di $x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0$, $x \in \mathbb{R}^4\}$

$W = \{$soluz di $3x_1 + x_3 - x_4 = 0$, $x \in \mathbb{R}^4\}$

- determ una base di $V \cap W$

  ($V \cap W = \{$ ins soluz di $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}^4 \}$ ...)
- determ una base di $V + W$
- verif che $V + W = \mathbb{R}^4$

Es: In $\mathbb{R}^3$ si cons i ssv

$V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

- determ una base di $V \cap W$
- estenderla ad una base di V e poi ad una di W
- dedurre una base di $V + W$

Oss:

$$\text{base } V+W = \underbrace{a, \overbrace{b}^{\text{base } W}}_{\text{base } V}, c \qquad b \to \text{base } V \cap W$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)}$$

TEO (della dimensione, per sottospazi):

- W, Z sottospazi di tipo finito di V
- $W \cap Z$ e $W + Z$ sono sottospazi di V, di tipo finito

$$\boxed{\dim(W+Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)}$$

dim:

Es: Se $W \subset Z$ allora $W \cap Z = W$, $W + Z = Z$ e ...

se $W \not\subset Z$ e $W \not\supset Z$ allora $W \cap Z \begin{smallmatrix} \neq Z \\ \neq W \end{smallmatrix}$

- se $W \cap Z = \{0\}$ allora base W ; base Z = base $W+Z$

  $\Rightarrow$ asserto
- se $W \cap Z \neq \{0\}$ allora
  - * si estende base $W \cap Z$ a base W
  - * " " " " base Z
  - * si ha:

$$\text{base } W+Z = \underbrace{\overbrace{\text{I I I (I)}}^{\text{base } W} \text{I I I I I I I}}_{\text{base } Z} \qquad \text{base } W \cap Z$$

Es: v base $W \cap Z$; v, w_1, w_2 base W; v, z_1 base Z. SE $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \gamma v + \beta_1 z_1 = 0$ ALLORA $\beta_1 z \in W \cap Z \Rightarrow \beta_1 z$ è cl di v $\Rightarrow \exists$ cl di w_1, w_2, v che vale $0 \Rightarrow w_1, w_2, v$ non l.i., assurdo.

$\Rightarrow$ asserto.

Es: In V_L (r, s rette $\ni L$; α, β piani $\ni L$)

- $\underbrace{\dim(r_L + s_L)}_{2 \text{ o } 1} = \underbrace{\dim r_L}_{1} + \underbrace{\dim s_L}_{1} - \underbrace{\dim(r_L \cap s_L)}_{0 \text{ o } 1}$
- $\underbrace{\dim(\alpha_L + r_L)}_{3 \text{ o } 2} = \underbrace{\dim \alpha_L}_{2} + \underbrace{\dim r_L}_{1} - \underbrace{\dim(\alpha_L \cap r_L)}_{0 \text{ o } 1}$

- $\underbrace{\dim(\alpha_L+\beta_L)}_{3 \text{ o } 2} \overset{\leftarrow}{=} \underbrace{\dim \alpha_L}_{2} + \underbrace{\dim \beta_L}_{2} - \underbrace{\dim(\alpha_L \cap \beta_L)}_{1 \text{ o } 2}$

Es In $\mathbb{C}^7$, W, Z s.s.v; provare che

- $\dim W = 3$ e $\dim Z = 5 \Rightarrow W \cap Z \neq \{0\}$
- $\dim W = 6$ e $Z \not\subset W \Rightarrow W + Z = \mathbb{C}^7$

($Z \neq \{0\}$; posto $\dim Z = x$ si ha

$$\underbrace{\dim(W+Z)}_{\leq 7} = 6 + x - \underbrace{\dim(W \cap Z)}_{\leq x}$$

ma $\dim(W \cap Z) = x \Rightarrow Z \subset W \ldots$)

---

* SOMMA DIRETTA *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$

$V_1, \ldots, V_s$ ssv di V

SE $\forall v \in V_1 + \cdots + V_s$

$\exists!\ v_1 \in V_1, \ldots, v_s \in V_s$ t.c. $v = v_1 + \cdots + v_s$

ALLORA la somma $V_1 + \cdots + V_s$ si dice DIRETTA

e si scrive $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ per ricordare

quanto sopra.

Es: In $\mathbb{R}^3$: $V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

- $V + W = \mathbb{R}^3$
- la somma non e' diretta: $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in V} - \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\in W} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

ma anche $\underset{\in V}{0} + \underset{\in W}{0} = 0$

- e' sbagliato indicare $V+W$ con $V \oplus W$