Es: In $\mathbb{C}^4$ si cons l'ins W delle soluzioni dell'eq

$$(1+i)\,x_2 + (1-i)\,x_4 = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{C}^4$$

- verificare che W è ssv di $\mathbb{C}^4$
- provare che $\dim W \leq 3$ (se fosse $\dim W = 4 \ldots$)
- determinare una rappres parametrica di W
- determinare una base di W
- calcolare $\dim W$

Es: In $\mathbb{C}^6$ si cons l'ins W delle soluzioni di

$$\begin{cases} (1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_3 + i\,x_5 = 0 \\ (1-i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (1+i)\,x_6 = 0 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{C}^6$$

- verif che W è ssv di $\mathbb{C}^5$
- provare che $\dim W \leq 5$
- determ una rappres parametrica di W
- determ una base di W
- calcolare $\dim W$

Es: In $\mathbb{C}[x]$ sia

$$\mathbb{C}[x]_3 = \{\, p(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ t.c. } p(x) = 0 \text{ oppure } \deg p(x) \leq 3 \,\}$$

Verificare che:

- $\mathbb{C}[x]_3 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle_{\mathbb{C}}$ ($\Rightarrow \mathbb{C}[x]_3$ è ssv di $\mathbb{C}[x]$)
- $1, x, x^2, x^3$ è base di $\mathbb{C}[x]_3$
- $\dim \mathbb{C}[x]_3 = 4$
- $1+i,\ 12 + (3-i)x,\ (1+i) + \pi x + i e x^2,$
  $(2-7i) + (1+i)x + (1+i)x^2 - (1-i)x^3$ è base di $\mathbb{C}[x]_3$
- $1,\ x - c_1,\ (x-c_2)^2,\ (x-c_3)^3$ è base, $\forall\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

Es: In $\mathbb{C}[x]$ sia

$$W = \{\, p(x) \in \mathbb{C}[x]_4 \text{ t.c. } p(2i) = 0 \,\}$$

- verif che W è ssv di $\mathbb{C}[x]$

$$\boxed{\begin{aligned} p(x) \in W &\Leftrightarrow \exists\, c_0, \ldots, c_3 \in \mathbb{C} : p(x) = (x-2i)(c_0 + \cdots + c_3 x^3) \\ \ldots &\Leftrightarrow p(x) \in \langle x - 2i,\ (x-2i)x,\ (x-2i)x^2,\ (x-2i)x^3 \rangle \end{aligned}}$$

- provare che $\dim W = 4$
- provare che: $(x-2i),\ (x-2i)^2,\ (x-2i)^3,\ (x-2i)^4$ è base di W.

---

* INTERSEZIONE E SOMMA di SOTTOSPAZI *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$

$V_1, \dots, V_h$ fam finita di sottospaz di V

- $V_1 \cap \dots \cap V_h$ è un sottosp di V
- $V_1 + \dots + V_h \overset{def}{=} \{ v \in V : \exists v_1 \in V_1, \dots, v_h \in V_h$ t.c. $v = v_1 + \dots + v_h \}$

  è un sottosp di V (<u>la SOMMA</u> di $V_1, \dots, V_h$).

<u>Oss</u>: <u>SE</u> $V_1, \dots, V_h$ tutti di tipo finito

<u>ALLORA</u>

* $V_1 + \dots + V_h$ è di tipo finito
* $\dim(V_1 + \dots + V_h) \leq \dim V_1 + \dots + \dim V_h$

($\mathcal{B}_1$ base V_1, ..., $\mathcal{B}_h$ base di V_h
allora $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_h$ è fam finita di <u>generatori</u> di $V_1 + \dots + V_h$ ed ha $\dim V_1 + \dots + \dim V_h$ elementi)

<u>Es</u>: In V_L ...

- α, β piani distinti per L, $r = \alpha \cap \beta$
  allora: $\alpha_L \cap \beta_L = r_L$
- r, s rette distinte per L, α il piano che le contiene; allora
  1) $r_L \cup s_L$ <u>non è</u> sottosp di α_L
  2) $r_L + s_L = \alpha_L$

<u>Es</u>: In $\mathbb{R}^3$ si cons i s.s.v

$$V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

- determ una base di $V+W$

$$V+W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

utilizz la procedura d'estrazione...

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

è base $\Rightarrow \dim(V+W) = 3 \Rightarrow V+W = \mathbb{R}^3$.

- determ una base di $V \cap W$