* DIMENSIONE *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett di tipo finito su $\mathbb{K}$.

- esistono basi di V

Oss: SE $V = \{0\}$, Φ è l'unica base di V, ed ha 0 elementi;

SE $V \neq \{0\}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ due basi di V, ALLORA $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ hanno lo stesso numero di elementi (no dim!)

---

def (dimensione di V)

$\mathcal{B}$ base di V: il numero di elementi di $\mathcal{B}$ (e quindi di qualsiasi base di V) si dice la DIMENSIONE di V (su $\mathbb{K}$) e si indica con

$$\dim_{\mathbb{K}} V \quad \text{oppure} \quad \dim V$$

Es:
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$

  ($E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è base ...)

  in generale: $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{n\times m} = nm$
- $\dim V_L = 3$, $\dim \alpha_L = 2$, $\dim r_L = 1$, $\dim \{\vec{LL}\} = 0$
- $\dim \{0\} = 0$

Oss: SE $\dim V = n$ ALLORA

- $v_1, \dots, v_k$ fam lin indip $\Rightarrow k \leq n$
- $v_1, \dots, v_n$ fam lin indip $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ base
- $v_1, \dots, v_k$ fam di gen $\Rightarrow k \geq n$
- $v_1, \dots, v_n$ fam di gen $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ base

---

Es:
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è fam lin indip in $\mathbb{R}^2$;

  $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow$ è base

  > applicare la proc di estrazione di una base da una fam di generatori a
  >
  > $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  >
  > se non restassero solo i primi due elementi, avremmo trovato una base di $\mathbb{R}^2$ con più di due elementi: assurdo.

- $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C}^3$ è fam lin dip $\quad (4 > 3 = \dim \mathbb{C}^3)$

  > applicare la proc ... a $v_1, \dots, v_4, e_1, e_2, e_3$
  > se restassero tutti gli elem $v_1, \dots, v_4$ avremmo trovato una base di $\mathbb{C}^3$ con almeno quattro elementi: assurdo.

- $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ non è fam di generatori $\quad (2 < 4 = \dim \mathbb{R}^4)$

  > applicando la proc ... a a_1, a_2 otterremmo una base di $\mathbb{R}^4$ con al più due elementi: assurdo

es: • $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$; dimostrare che la fam

$$I, A, A^2, A^3, A^4$$

è lin dip.

• Verif che

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è una base di $\mathbb{C}^{2\times 2}$

---

* SOTTOSPAZI *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$.

def (sottospazio vett)

$W \subset V$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V su $\mathbb{K}$ se

$\boxed{\text{SSV.1}}$ $0 \in W$

$\boxed{\text{SSV.2}}$ $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$

$\boxed{\text{SSV.3}}$ $v \in W,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha v \in W$

es: • Sia $W \subset \mathbb{C}^4$ l'ins delle soluz del sistema

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 + x_3 = 0 \\ i x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{C}^4$$

W risulta un sottosp (vett) di $\mathbb{C}^4$.

• L punto dello spazio, r retta per L, α piano contenente L:

$$\{\vec{LL}\},\ r_L,\ \alpha_L,\ V_L \text{ sono sottospazi di } V_L$$

Oss: $\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$

• SE W è sottosp di V, allora W con $+$ e multiplo è sp vett su $\mathbb{K}$

• $v_1, \dots, v_k$ fam finita di V:

- $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ è sottosp di V
- $v_1, \dots, v_k$ è una fam di generatori di $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ si chiama il SOTTOSPAZIO GENERATO da $v_1, \dots, v_k$

• $\langle \Phi \rangle = \{0\}$ è un sottospazio di V: il sottospazio generato da Φ.

TEO: $\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$ di tipo finito, $\dim V = n$; W sottosp di V:

• W è di tipo finito

• $\dim W \le n$

• $\dim W = n \iff W = V$

dim: se $W = \{0\}$, ok

se $W \ne \{0\}$:

1) scelgo $v_1 \begin{cases} \ne 0 \\ \in W \end{cases}$

2) se $\langle v_1 \rangle = W$: ok, altrimenti scelgo $v_2 \begin{cases} \in W \\ \notin \langle v_1 \rangle \end{cases}$

3) se $\langle v_1, v_2 \rangle = W$: ok, altrimenti scelgo $v_3 \begin{cases} \in W \\ \notin \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$

⋮

finché $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = W$

Oss: $v_1, \dots, v_k$ sono fam lin indip $\Rightarrow$ base di W.