Es: $\mathbb{R}^3$ sp vett su $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

decidere se $\mathcal{F}$ è fam di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Sol: (1) Lo è $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, x è comb lin di $\mathcal{F}$,

ovvero: $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

sist da studiare:

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{cases} \alpha_1^{\,2} + \alpha_2 + \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_2^{\,3} = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_4^{\,1} = x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

E' in f di Gauss e $\forall x_1, x_2, x_3$ $\exists$ soluzioni $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ è...

(2) Si oss che: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{F} \rangle$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{F} \rangle$

e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{F} \rangle$

q. di $\langle \mathcal{F} \rangle$ include la base canonica di $\mathbb{R}^3$;

$\mathcal{F}$ è...

Es: usare la Procedura per estrarre da $\mathcal{F}$ una base di $\mathbb{R}^3$.

Sol: Si ottiene $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Es: Verif che le seguenti fam di elem di $\mathbb{C}^2$ (sp vett su $\mathbb{C}$) sono lin indipendenti:

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}$

Es: In $\mathbb{R}^3$ siano

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

- verif che $\mathcal{F}$ è lin dip;
- estrarre da $\mathcal{F}$ una nuova fam $\mathcal{G}$ t.c.
  - $\mathcal{G}$ è lin indip
  - $\langle \mathcal{G} \rangle = \langle \mathcal{F} \rangle$;
- verif che $\mathcal{G}$ non è fam di generatori di $\mathbb{R}^3$;
- COMPLETARE $\mathcal{G}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Sol: • $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (è c. lin dei precedenti)

- usando la procedura si ottiene:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

E' lin indip; $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{G} \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{G} \rangle = \langle \mathcal{F} \rangle$.

Oss: Siano $\mathcal{F} = v_1, \dots, v_k$ e $\mathcal{G} = w_1, \dots, w_h$ due fam finite di elem di V t.c.

$$\forall j, \quad v_j \in \langle \mathcal{G} \rangle$$
$$\forall r, \quad w_r \in \langle \mathcal{F} \rangle$$

Allora: $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle$

dim: $\langle \mathcal{F} \rangle \subset \langle \mathcal{G} \rangle$ e $\langle \mathcal{G} \rangle \subset \langle \mathcal{F} \rangle$, quindi...

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \mathcal{G} \rangle$
- Procedura: Considero la nuova fam $\mathcal{G}'$ che si ottiene accodando a $\mathcal{G}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{G}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osservo che $\mathcal{G}'$ è certamente una fam di generatori di $\mathbb{R}^3$; applico a $\mathcal{G}'$ la procedura di estrez di una base da una fam di generatori, osservando che certamente $\mathcal{G}$ sarà parte della base ottenuta.

Es: $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ sp vett su $\mathbb{R}$;

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- verif che $\mathcal{F}$ è lin indip
- verif che $\mathcal{F}$ non è fam di generatori di $\mathbb{R}^{2 \times 2}$
- determ una base di $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Es: V sp vett su $\mathbb{K}$, $\mathcal{F} = v_1, v_2, v_3, v_4$ fam finita di elem di V. Provare che

$\mathcal{F}$ lin indip $\Leftrightarrow$ v_3, v_2, v_1, v_4 è fam finita lin indip

In generale: tutte le fam finite ottenute da una lin indip cambiando l'ordine degli elem sono lin indip

---

Es: In $\mathbb{R}[x]$, provare che:

- $3 + 3x, \quad 1 + x, \quad 1 - x$

è una fam linearmente dipendente

- $1, \quad 1 + x, \quad 3 - x^2$

è una fam linearmente indipendente.