AL&FG 43 44 45 / 6 aprile 2011 / C41

* SPAZI VETTORIALI di TIPO FINITO *
* BASI, DIMENSIONE *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$.

- $v_1, \ldots, v_k$ una famiglia finita $(k \geq 1)$ di elem di V;
  $v \in V$ è una combinaz lineare di $v_1, \ldots, v_k$ se
  $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ t.c. $\quad v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$
- $\emptyset$ è una fam finita di elem di V: la famiglia vuota.
  Un $v \in V$ si dice una comb lin della fam vuota se e solo se $v = 0$.
- $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ denota l'ins degli elem di V che sono combinaz lineari di $v_1, \ldots, v_k$
- detta Φ la fam vuota di V si ha: $\langle \Phi \rangle = \{0\}$.

$v_1, \ldots, v_k$ una fam finita di elem di V.
Sono equivalenti gli asserti:

1) ciascun v_λ non è comb lin dei rimanenti elem della fam
2) ciascun v_λ non è comb lin degli elementi della fam che lo precedono
3) se $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ sono t.c.
$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$$
allora $a_1 = 0, \ldots, a_k = 0$
4) se $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{K}$ sono t.c.
$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$$
allora $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$

dim: $\quad (1) \Rightarrow (2)$: non$(2) \Rightarrow$ non(1)

$(2) \Rightarrow (3)$: se $a_k \neq 0$ allora v_k sarebbe c. lin dei precedenti
$\Rightarrow a_k = 0$ ecc...

$(3) \Rightarrow (4)$ $\quad a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$
$$\Rightarrow (a_1 - b_1) v_1 + \cdots + (a_k - b_k) v_k = 0$$
$$\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_k - b_k = 0 \quad \text{ecc...}$$

$(4) \Rightarrow (1)$ $\quad$ se, ad es: $v_2 = a_1 v_1 + a_3 v_3 + \cdots + a_k v_k$ allora
$$0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_k =$$
$$= a_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_k v_k$$
e q.di $\quad 0 = a_1,\ 1 = 0, \ldots, 0 = a_k$, assurdo.

se $v_1, \ldots, v_k$ verif una delle propr (q.di TUTTE), si dice una fam linearmente indipendente; Φ si dice lin indip per def; una fam che non sia lin indip si dice linearmente dipendente.

Es: • v_1, v_2, v_3 base di V_L : v_1, v_2, v_3 è una famiglia lin indip (su $\mathbb{R}$).

• V sp vett su $\mathbb{C}$ con pr herm; $v_1, \dots, v_k$ famiglia di elem non nulli ortogonali a coppie : $v_1, \dots, v_k$ è una famiglia lin indip (su $\mathbb{C}$).

• $\mathbb{K}[x]$ con $+$ e multiplo è sp vett su $\mathbb{K}$. Per ogni $n \geq 1$ la famiglia $1, x, \dots, x^n$ è lin indip (su $\mathbb{K}$).

• In $\mathbb{C}^2$ sp vett su $\mathbb{C}$, la fam $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}$ è linearm dip su $\mathbb{C}$.

• In $\mathbb{C}^2$ sp vett su $\mathbb{R}$, la fam $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}$ è lin indip su $\mathbb{R}$.

• V sp vett su $\mathbb{K}$, $v_1, \dots, v_k$ fam finita di elem di V;

1) se $\exists \lambda$ t.c. $v_\lambda = 0$ allora la fam è lin dip
2) se $\exists \lambda, \mu$ t.c. $\lambda \neq \mu$ e $v_\lambda = v_\mu$ allora la fam è lin dip

---

* BASI *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$;
$v_1, \dots, v_k$ fam finita di elem di V:

• se ogni $v \in V$ è comb lin di $v_1, \dots, v_k$ ovvero se $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = V$ allora $v_1, \dots, v_k$ si dice fam finita (non vuota) di generatori di V (su $\mathbb{K}$)

• Φ è una fam di generatori di $V \Leftrightarrow V = \{0\}$.

> def: lo sp vett V si dice di tipo finito (su $\mathbb{K}$) se $\exists$ una fam finita (vuota o no) di generatori di V (su $\mathbb{K}$).

• $\mathbb{K}^n$ è sp vett di tipo finito

• $\mathbb{K}[x]$ come sp vett su $\mathbb{K}$ non è di tipo finito
(se $p_1(x), \dots, p_k(x)$ è fam finita di elem non nulli di $\mathbb{K}[x]$, ogni comb lin non nulla ha grado non sup a $\max\{\deg p_1(x), \dots, \deg p_k(x)\}$ ...)

---

def (base di uno sp vett)
Una fam finita (vuota o no) di elem di V si dice UNA BASE di V (su $\mathbb{K}$) se è

• una fam di generatori di V
• una fam linearmente indipendente

Oss: $V = \{0\}$, Φ è l'unica base; V non di tipo finito : $\nexists$ basi

---

def (base di Hamel): V sp vett non di tipo finito, $\mathcal{F}$ un sottoinsieme di V con infiniti elementi.
$\mathcal{F}$ si dice una BASE di HAMEL di V (su $\mathbb{K}$) se

• ogni fam finita estratta da $\mathcal{F}$ è lin indipendente
• $\forall v \in V$, $\exists$ fam finita $w_1, \dots, w_k$ estratta da $\mathcal{F}$ t.c. v è comb. lin di $w_1, \dots, w_k$.

Es: x^j, $j \in \mathbb{N}$ è base di Hamel di $\mathbb{k}[x]$.

PROBLEMA: dato V sp vett di tipo finito, esistono basi di V ?

RISPOSTA: sì.

- se $V = \{0\}$, Φ è l'unica base di V.
- se $V \neq \{0\}$ ...

$\boxed{\text{ALGORITMO 1}}$ per estrarre una base da una fam finita $v_1, \dots, v_k$ di generatori di V

(1) $i = k$; $w_1 = v_1, \dots, w_i = v_i$

(2) cercare in $w_1, \dots, w_i$ il primo elem che sia comb lin dei precedenti...

SE $\nexists$ ALLORA $w_1, \dots, w_i$ è fam di gen e fam lin indip, ovvero base, STOP

ALTRIMENTI eliminarlo da $w_1, \dots, w_i$;

$i \leftarrow i-1$; $w_1, \dots, w_i$ la fam residua

(Oss: $w_1, \dots, w_i$ è nuova fam di generatori non vuota)

ripeti passo (2).