* POLINOMI IN UN ELEMENTO di UN' ALGEBRA *

$\mathbb{K}$ campo, $\mathbb{K}[x]$ l'anello dei polinomi a coeff in $\mathbb{K}$ nell' indet x; $\mathbb{K}^{n\times n}$ la $\mathbb{K}$-algebra delle matr $n\times n$ ad elem in $\mathbb{K}$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \in \mathbb{K}[x]$$

si pone:

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Gli elem di $\mathbb{K}^{n\times n}$ del tipo $\boxed{p(A) \text{ con } p(x)\in\mathbb{K}[x]}$ si dicono polinomi in A a coeff in $\mathbb{K}$; il loro insieme si denota con $\mathbb{K}[A]$.

Es: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $q(x) = b_0 + b_1 x$

- $p(A) = \dots$, $q(A) = \dots$
- $p(A) + q(A) = \dots$; $p(x) + q(x) = \dots$

  Oss: $s(x) = p(x) + q(x) \Rightarrow p(A) + q(A) = s(A)$
- $p(A)\, q(A) = \dots$; $p(x)\, q(x) = \dots$

  Oss: $r(x) = p(x)\, q(x) \Rightarrow p(A)\, q(A) = r(A)$

---

dunque: $\mathbb{K}[A]$ e' un anello commutativo con identita' (l'elem corrisp a $p(x)=1$)

Es: In $\mathbb{C}^{n\times n}$ scrivere

$$\big((1+i)I + (1-i)A^2\big) + \big(3I - 6iA\big)$$

$$\big((1+i)I + (1-i)A^2\big) \cdot \big(3I - 6iA\big)$$

come comb lin di I, A, A^2, A^3 a coeff in $\mathbb{C}$

Es: In $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

- Calcolare $p(A)$;
- indicare vari $q(x)\in\mathbb{R}[x]$ tali che

$$q(A) = I + A + A^2 + A^3 + A^4.$$

Si cons la $\mathbb{K}$-algebra $\mathbb{K}$:

- se $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \in \mathbb{K}[x]$, $c\in\mathbb{K}$

  allora $p(c) = a_0 + a_1 c + \dots + a_k c^k \in \mathbb{K}$
- se $s(x) = p(x) + q(x)$, $t(x) = p(x)\, q(x)$ in $\mathbb{K}[x]$

  allora $s(c) = p(c) + q(c)$, $t(c) = p(c)\, q(c)$ in $\mathbb{K}$
- se $p(x)\in\mathbb{K}[x]$, $c\in\mathbb{K}$,

  detti $q(x)$, $r(x)$ il quoziente ed il resto della divis euclidea di $p(x)$ per $x-c$

  si ha:

  1) $r(x)\in\mathbb{K}$ [$r(x)=0$ oppure $r(x)\neq 0$ e $\deg r(x) < 1$]
  2) $r(x) = p(c)$

  [$r(x)\in\mathbb{K} \Rightarrow r(x) = r_0$;
  $p(x) = q(x)(x-c) + r_0$
  $\Rightarrow p(c) = q(c)(c-c) + r_0$ …]

3) $p(x) = q(x)(x-c) + p(c)$

4)
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{TEOREMA di RUFFINI:} \\ p(x) \text{ è divisibile per } x-c \\ \iff p(c) = 0 \end{array}}$$

Es:

(1) In $\mathbb{C}^{2\times 2}$ sia $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix}$

- determinare $X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ t.c. $AX = 0$, $YA = 0$
 (risolvere sist di eq.ni lineari)
- verificare che $\exists!\ X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ t.c.
 $AX = I$, $YA = I$

(2) Siano $f, g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ applicaz $\mathbb{C}$-lineari t.c.:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\1+i\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-i\\-i\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}$$

- verificare che $f = g$
- determ $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ t.c.
 $f(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{C}^3$

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'appl $\mathbb{R}$-lineare t.c.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

- Calcolare $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- determ $M \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ t.c. ...

(4) $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ def da:

$$f = L_A \quad \text{con } A = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

- determinare $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ t.c.
$$5f^3 - 7f^2 - 3f - 4\iota = L_B$$

(5) Sia $p(x) = x^3 - 6ix^2 - 11x + 6i \in \mathbb{C}[x]$. Dire quali tra i seguenti polinomi sono divisori di $p(x)$:

$$x,\ x+1,\ x-i,\ x+2,\ x-2i,\ x+3,\ x-3i$$

[usare il Teo di Ruffini]