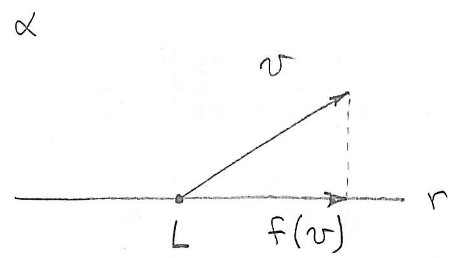
* APPLICAZIONI LINEARI *

L un punto, $\alpha \ni L$ un piano, $r \ni L$ una retta di α:



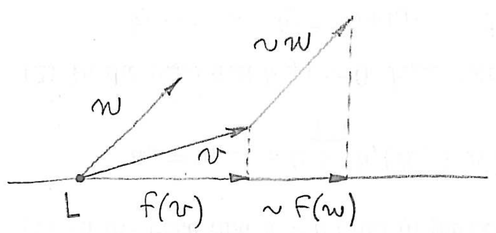
Si cons: α_L, r_L sp vett su $\mathbb{R}$, e l'appl

$$f: \alpha_L \to r_L$$

def da:

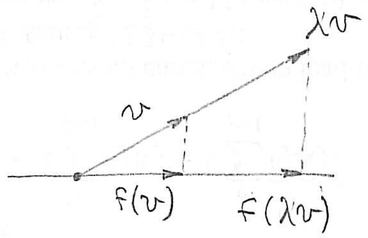
$$f(v) = \text{"la pr ort di } v \text{ su } r\text{"}$$

Si ha:



$\boxed{AL.1}$ $\forall v, w \in \alpha_L$:

$$f(v+w) = f(v) + f(w)$$



$\boxed{AL.2}$ $\forall v \in \alpha_L$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

Per dire che f verifica AL.1 e AL.2 si dice che è una <u>APPLICAZIONE</u> $\mathbb{R}$-<u>LINEARE</u> di α_L in r_L

<u>Oss</u>: $\forall v_1, \dots, v_k \in \alpha_L$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ si ha (da AL.1 e AL.2):

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_k f(v_k)$$

$\mathbb{K}$ campo, $A = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{n \times m}$;

$$L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$$

l'applicazione def da:

$$L_A(x) = Ax$$

Si ha:

- $\forall x, y \in \mathbb{K}^m$, $a \in \mathbb{K}$:

$$L_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = L_A(x) + L_A(y)$$
$$L_A(ax) = A(ax) = a(Ax) = a\, L_A(x)$$

$\Rightarrow$ L_A è una applicazione $\mathbb{K}$-lineare

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \Rightarrow L_A(x) = x_1 a_1 + \dots + x_m a_m$

- $L_A(e_1) = a_1, \dots, L_A(e_m) = a_m$

<u>Oss</u>: • $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ è una appl $\mathbb{K}$-lin da $\mathbb{K}^m$ in $\mathbb{K}^n$;

• <u>SE</u> $f: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ è una appl $\mathbb{K}$-lin, <u>ALLORA</u> $\exists! A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ t.c. $f = L_A$.

(infatti: $f(x) = x_1 \underbrace{f(e_1)}_{= a_1 \in \mathbb{K}^n} + \dots + x_m \underbrace{f(e_m)}_{= a_m \in \mathbb{K}^n} \dots$)

$$\boxed{\text{Le appl } \mathbb{K}\text{-lin da } \mathbb{K}^m \text{ in } \mathbb{K}^n \text{ sono } \underline{\text{tutte e sole}} \text{ le } L_A \text{ con } A \in \mathbb{K}^{n \times m}.}$$

* L'ALGEBRA End(V) *

$\mathbb{K}$ campo, V sp vett su $\mathbb{K}$;

$$\mathrm{End}(V) = \{ f : V \to V, \text{ appl } \mathbb{K}\text{-lin} \}$$

Gli elementi di End(V) si dicono <u>ENDOMORFISMI</u> di V.

- <u>somma</u> di endomorfismi:

  $f, g \in \mathrm{End}(V)$;

  $f+g : V \to V$ t.c.

  $\forall v \in V, \ (f+g)(v) = f(v) + g(v)$

- <u>multiplo</u> di un endomorfismo:

  $f \in \mathrm{End}(V), \ \alpha \in \mathbb{K}$;

  $\alpha f : V \to V$ t.c.

  $\forall v \in V, \ (\alpha f)(v) = \alpha(f(v))$

- <u>Prodotto</u> (di composizione) di endomorfismi:

  $f, g \in \mathrm{End}(V)$;

  $fg : V \to V$ t.c.

  $\forall v \in V, \ (fg)(v) = f(g(v))$

Si ha:

- $f+g, \ \alpha f, \ fg \in \mathrm{End}(V)$ (infatti...)
- dette $\omega : V \to V$, $\iota : V \to V$ le applicaz def da

  $\omega(v) = 0, \ \iota(v) = v$ ...

  - $\omega, \iota \in \mathrm{End}(V)$
  - $\forall f \in \mathrm{End}(V)$:

    $f + \omega = \omega + f = f$

    $\iota f = f \iota = f$

  ovvero ω, ι sono gli elem neutri di somma e prodotto.

<u>Oss</u>: End(V), rispetto a $+, \cdot$, multiplo, e' un'algebra con identita' su $\mathbb{K}$

<u>Es</u>: $\mathbb{K}^n$ sp vett su $\mathbb{K}$; $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ algebra delle applic $\mathbb{K}$-lin da $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^n$

- gli elem di $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ sono le

  $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ con $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- $L_A + L_B = L_{(A+B)}$; $L_A L_B = L_{(AB)}$

  $\alpha L_A = L_{(\alpha A)}$

- $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ e $\mathbb{K}^{n \times n}$ sono "la stessa algebra"

Es: calcolare:

$$(1,\ 2+i,\ 3)\begin{pmatrix}3-i & 4\\ 1 & i\\ 0 & 6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3-i & 4\\ 1 & i\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -i\end{pmatrix}$$

$$(1,\ 2+i,\ 3)\begin{pmatrix}3-i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3-i\\ 1\\ 0\end{pmatrix}(1,\ 2+i,\ 3)$$

Es: $A, B, C \in \mathbb{C}^{2\times 4}$; $X, Z \in \mathbb{C}^{4\times 3}$

calcolare:

$$(iA - 6B + C)\left((1+i)X + 3Z\right)$$

Es: In $\mathbb{C}^{4\times 4}$ calcolare

$$(A+B)(A+B), \quad (A+B)(A-B)$$

|| attenzione: $AB, BA \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ma $AB \overset{?}{=} BA$

Es: $A = \begin{pmatrix} i & 1+i\\ 3 & 0\\ -1 & 2-i\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$;

calcolare: $\overline{A}$, A^T, A^H, $\overline{(3iA)}$, $(3iA)^H$

Es: A, B, C matrici ad elem in $\mathbb{C}$ t.c. ...

Verificare che: $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

$$(ABC)^H = C^H B^H A^H$$

Es: In $\mathbb{C}^{2\times 2}$ sia $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i\\ 1-i & 2-i\end{pmatrix}$

- determinare $X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ t.c. $AX = 0$, $YA = 0$ (risolvere sist di eq lin ...)
- verificare che $\exists!\ X, Y \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ t.c. $AX = I$, $YA = I$
