* L'ANELLO $\mathbb{K}[x]$ ... *

$\mathbb{K}$ campo; S = ins succes $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ t.c.

- $\forall a_k \in \mathbb{K}$
- $\exists k$ (dip dalla succes): $\forall h > k$ si ha $a_h = 0$

In S si pone:

- $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0+b_0,\ a_1+b_1,\ a_2+b_2, \dots)$
- $(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) =$
$$= (a_0 b_0,\ a_0 b_1 + a_1 b_0,\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \dots)$$

$S, +, \cdot$ risulta un anello commutativo con id

- id : $(1, 0, 0, \dots)$
- elem neutro di $+$: $(0, 0, 0, \dots)$

Es: l'opposto di $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ è ...

Oss: $\forall a, b \in \mathbb{K}$ si ha:

- $(a, 0, 0, \dots) = (b, 0, 0, \dots) \Leftrightarrow a = b$
- $(a, 0, 0, \dots) + (b, 0, 0, \dots) = (a+b, 0, 0, \dots)$
- $(a, 0, 0, \dots) \cdot (b, 0, 0, \dots) = (ab, 0, 0, \dots)$

$\Rightarrow$ al posto di $(a, 0, 0, \dots)$ si scrive a.

Es: • $a \in \mathbb{K}$; $a \in S$ significa: $(a, 0, 0, \dots) \in S$

- $\mathbb{K} \subset S$ significa: $\forall a \in \mathbb{K}$, $(a, 0, 0, \dots) \in S$
- $a \in \mathbb{K}$; $a\,(c_0, c_1, c_2, \dots)$ significa $(a, 0, 0, \dots)(c_0, c_1, c_2, \dots) = (ac_0, ac_1, ac_2, \dots)$
- $a \in \mathbb{K}$; $a + (c_0, c_1, c_2, \dots)$ significa $(a, 0, 0, \dots) + (c_0, c_1, c_2, \dots)$

Oss: Posto $x = (0, 1, 0, 0, \dots)$ si ha:

- $x^1 = (0, 1, 0, 0, \dots)$
  $x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$
  $x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ etc
- $\forall a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$:
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$$
- $\forall s \in S$, $\exists a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ t.c.
$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$
$x^0 = 1 \Rightarrow s$ è comb. lin. di potenze di x

S si denota con $\mathbb{K}[x]$, i suoi elementi con simboli tipo $p(x), q(x), \dots$ e si dicono POLINOMI NELL'INDETERMINATA x A COEFFICIENTI IN $\mathbb{K}$.

Es: In $\mathbb{C}[x]$ si ha:

- $\big((1+i) + (1-i)x\big) + \big((2-i) + ix + (2+i)x^2\big) =$
$$= \big((1+i) + (2-i)\big) + \big((1-i) + i\big)x + (2+i)x^2$$
$$= 3 + x + (2+i)x^2$$
- $\big((1+i) + x\big) \cdot (2 - x) = 2(1+i) + \big(2 - (1+i)\big)x - x^2$
$$= (2+2i) + (1+i)x - x^2$$

Oss: $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$;

SE $a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = 0$

ALLORA $a_0 = 0,\ a_1 = 0, \dots, a_k = 0$

$$\left[\begin{array}{c} a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = (a_0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots) = (0, 0, \dots) \\ \Longleftrightarrow \quad a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_k = 0 \end{array} \right]$$

Oss: $a_0, \dots, a_k,\ b_0, \dots, b_h \in \mathbb{K}$;

SE $a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = b_0 + b_1 x + \dots + b_h x^h$ e $k \leq h$

ALLORA $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k,\ b_{k+1} = 0, \dots, b_h = 0$

def (grado di un polinomio):

- $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, $p(x) \neq 0$
- $\exists!\ k$ intero ≥ 0, $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ t.c. $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ e $a_k \neq 0$

  k: GRADO di $p(x)$, $\deg(p(x))$

- gli elem di $\mathbb{K}[x]$ di grado zero sono gli elem non nulli di $\mathbb{K}$; 0 non ha grado.

Oss: $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$; $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$

- $p(x) \cdot q(x) \neq 0$
- $\deg(p(x)\, q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$
- **SE** $p(x) + q(x) \neq 0$ **ALLORA** $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{\deg(p(x)), \deg(q(x))\}$

Es: $p(x) = 3 - 6x$, $q(x) = 3 - 4x^2 \in \mathbb{R}[x]$;

- $\deg(p(x)) = 1$, $\deg(q(x)) = 2$
- $p(x)\, q(x) = (3 - 6x)(3 - 4x^2) = 9 - 18x - 12x^2 + 24x^3 \neq 0$
- $\deg(p(x)\, q(x)) = 3 = \dots$
- $p(x) + q(x) = (3 - 6x) + (3 - 4x^2) = 6 - 6x - 4x^2 \neq 0$
- $\deg(p(x) + q(x)) = 2 \leq \dots$

Es: $p(x) = 3 - 4x^2$, $q(x) = 1 + 6x + 4x^2 \in \mathbb{Q}[x]$

determinare:
- $p(x)\, q(x)$ e constatare che ...
- $p(x) + q(x)$ e constatare che ...

TEO (divisione euclidea)

- $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ (dividendo)
  $\delta(x) \in \mathbb{K}[x]$ (divisore), $\neq 0$

$\Rightarrow \exists!$ $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ (quoziente)
$r(x) \in \mathbb{K}[x]$ (resto)

t.c.
- $d(x) = q(x)\, \delta(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$ oppure $\deg r(x) < \deg \delta(x)$

SE $r(x) = 0$ **ALLORA** $d(x) = q(x)\, \delta(x)$ e $d(x)$ si dice DIVISIBILE per $\delta(x)$

Es: $d(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$; $d_2, \delta_1 \neq 0$

$\delta(x) = \delta_0 + \delta_1 x$ (in $\mathbb{R}[x]$)

Teo: $\exists!\ q(x), r(x)$ t.c.

$$d(x) = q(x)\delta(x) + r(x)$$

e $r(x) = 0$ oppure $\deg(r(x)) < \deg(\delta(x))$

$\Rightarrow \deg(q(x)) = 1$: $q(x) = q_0 + q_1 x$, $q_1 \neq 0$

e $r(x) = r_0$ (può essere $= 0$!)

si deve avere:

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 = (q_0 + q_1 x)(\delta_0 + \delta_1 x) + r_0$$

$$= (r_0 + q_0\delta_0) + (q_1\delta_0 + q_0\delta_1)x + q_1\delta_1 x^2$$

ovvero:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{cases} d_0 = r_0 + q_0\delta_0 \\ d_1 = q_1\delta_0 + q_0\delta_1 \\ d_2 = q_1\delta_1 \end{cases}$$

sist di eq lin nell'inc $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ r_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

E' in f di Gauss...

$3 \Rightarrow\ q_1 = \dfrac{d_2}{\delta_1}$ $(\neq 0)$

$2 \Rightarrow\ q_0 = \dfrac{d_1 - q_1\delta_0}{\delta_1}$

$3 \Rightarrow\ r_0 = d_0 - q_0\delta_0$

Es: $d(x) = 3x^2 - x + 1$

$\delta(x) = x - 2$ $\in \mathbb{Q}[x]$

decidere se $d(x)$ sia divisibile per $\delta(x)$.

Sol: Teo $\Rightarrow \exists!\ q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ t.c.

$$d(x) = q(x)\delta(x) + r(x)$$

e $r(x) = 0$ oppure $\deg(r(x)) < 1$

Allora: $\deg(q(x)) = 1$; $q(x) = q_0 + q_1 x$, $q_1 \neq 0$

$r(x) = r_0$

e: $3x^2 - x + 1 = (q_0 + q_1 x)(x - 2) + r_0$

$= (r_0 - 2q_0) + (q_0 - 2q_1)x - 2q_1 x^2$

$\Rightarrow\ 3 = -2q_1$, $q_1 = -\frac{3}{2}$ $(\neq 0)$

$-1 = q_0 - 2q_1$, $q_0 = 2q_1 - 1 = -4$

$1 = r_0 - 2q_0$, $r_0 = 2q_0 + 1 = -7$

Quindi: $q(x) = -4 - \frac{3}{2}x$, $r(x) = -7$

$r(x) \neq 0 \Rightarrow d(x)$ non è divisibile per $\delta(x)$.

Es: In $\mathbb{C}[x]$ calcolare quoz e resto della divisione di 0 per $(2+i)x^2 + i$; $(3+i)x + 2$ per $(2-i)x^3 + x$; $3x^2 - i$ per $x^2 - x$; $2x^2 + 6x$ per $x + 3$