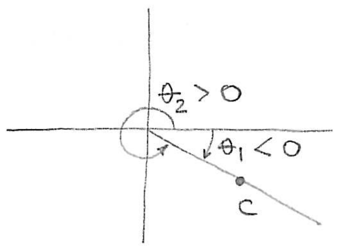
AL & FG 27 28 29 / 25 marzo 2011 / A22

Premessa per l'int geom di c d: ARGOMENTI.

- $c = a + ib$, $\theta \in \mathbb{R}$; si fa ruotare il semiasse reale positivo di:



θ rad in senso antiorario (da Σ), se $\theta \geq 0$,

$|\theta|$ rad in senso orario (da Σ), se $\theta < 0$.

> SE il semiasse così ruotato contiene c
> ALLORA θ si dice un ARGOMENTO di c

(1) $c = 0$: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ è un argomento di c.

(2) $c \neq 0$:

- $\theta \in \mathbb{R}$ è un argomento di c $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos \theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

- $\tilde{\theta} = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [0, \pi]$, allora:

$$\theta = \begin{cases} \tilde{\theta} & \text{se } b \geq 0 \\ -\tilde{\theta} & \text{se } b < 0 \end{cases} \quad \text{è un argomento di } c$$

- se θ è un argomento di c, tutti e soli gli argom di c si ottengono da:

$$\theta + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

l'unico di tali elementi in $(-\pi, \pi]$

si indica con $\arg(c)$

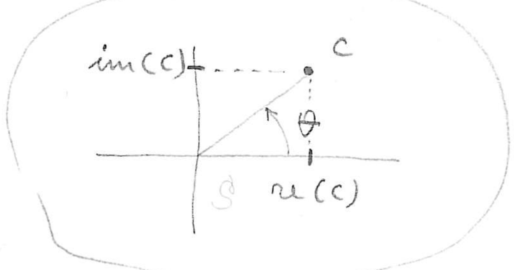
si dice ARGOMENTO PRINCIPALE di c

> Es: indicare tutti gli argomenti di $c = 1 + i$,
> e poi $\arg(c)$.

• $c \in \mathbb{C}$; $\rho = |c|$, θ un argomento di c

$\Rightarrow$ $re(c) = \rho \cos\theta$

$im(c) = \rho \operatorname{sen}\theta$.



$\Rightarrow$ $c = \rho\cos\theta + i\rho\operatorname{sen}\theta$

$= \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

> Oss: si ottiene c dal modulo ρ e un argomento θ
> e si dice RAPPRESENTAZIONE di c in FORMA TRIGONOMETRICA

Es: • $\rho = 2$, $\theta = \pi/3$ $\Rightarrow$ $c = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + i\sqrt{3}$

• $c = 1 - i$ $\Rightarrow$ $|c| = \sqrt{2}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$;

$im(c) < 0$ $\Rightarrow$ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ è un argomento di c

(è $\arg(c)$!);

$c = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ è la forma trigon di c.

Interpretaz geom di cd e di c^{-1}:

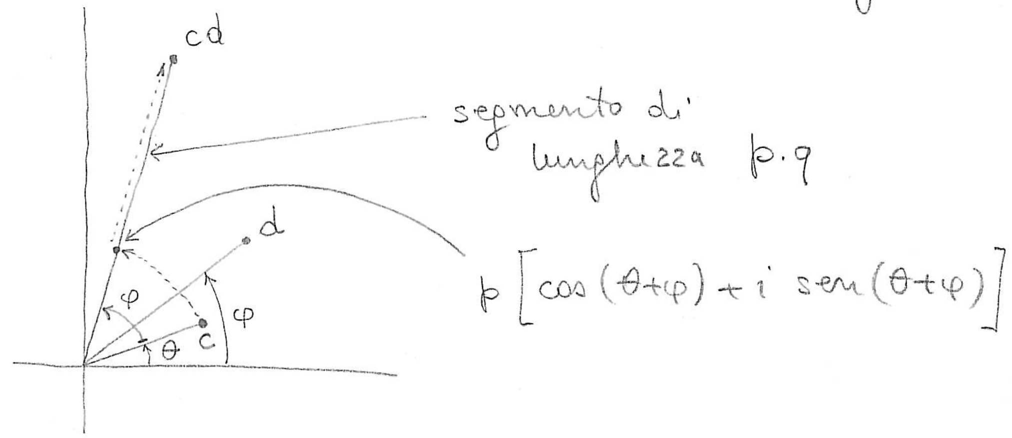
$c = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$
$d = q(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ elem di $\mathbb{C}$ in f. trigonom.

$cd = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\cdot q(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) =$

$= (\rho\cdot q)(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + i[\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi]$

$= (\rho\cdot q)\left[\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\right]$

Oss: $\rho\cdot q \geq 0$ $\Rightarrow$ • ρq è $|cd|$,
• $\theta+\varphi$ è un argomento di cd.



$c = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \neq 0$ f trigon di c,

$c' = \rho^{-1}(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)) \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $cc' = \rho\rho^{-1}\left[\cos(\theta-\theta) + i\operatorname{sen}(\theta-\theta)\right] = 1$

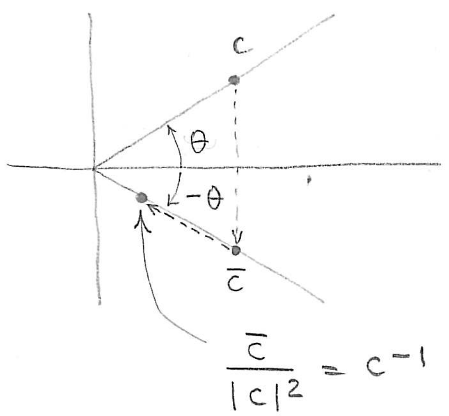
ovvero: $c' = c^{-1}$, cioè:

$$\boxed{c^{-1} = \rho^{-1}\left[\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\right]}$$

• $|c^{-1}| = |c|^{-1}$

• $-\theta$ è un argomento di c^{-1}

Es:



$$c^{-1} = \frac{1}{c} = \frac{\bar{c}}{c\bar{c}} = \frac{\bar{c}}{|c|^2}$$

Es: (1) Ruotare il semiasse reale positivo di:

- 0 rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, $-\pi$ rad, 5π rad, $-\frac{\pi}{4} + 32\pi$ rad

(2) calcolare: $|-3-5i|$, $\arg(-3-5i)$, <u>tutti</u> gli argomenti di $-3-5i$; scrivere $-3-5i$ in f. trigon.

(3) lo stesso per -3, $5i$, $-7i$, $-3+5i$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}\, i$.

(4) $c \in \mathbb{C}$ t.c. $|c| = \sqrt{7}$ e un argomento di c è 127 r

scrivere
- c in f. trigonom.
- c in f. algebrica.

(5) lo stesso per

c ⟨ modulo: e; un argomento: $\frac{\pi}{17}$, d ⟨ modulo: $\sqrt{37}$; un argomento: $\sqrt{27}\,\pi$

(6) $-4+13i \in \mathbb{C}$, θ un suo argomento;
calcolare $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ <u>senza</u> calcolare θ.

(7) Rappres sul piano di Gauss:

$2+3i$, $(2+3i)\,i$, $(2+3i)(-1)$,
$(2+3i)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $(2+3i)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

(8) Rappres sul piano di Gauss l'ins

$$\Gamma = \{c \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |c| = 1\}$$

e verif che: $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$
è una rappres param di Γ.

(9) Provare che esiste, ed indicare, un $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$
t.c. $(3-2i)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \sqrt{10} + \sqrt{3}\, i$

(10) $c = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \neq 0$ f. trigonom, $k \in \mathbb{Z}$:
Verificare che

$$c^k = \rho^k\left(\cos(k\theta) + i\operatorname{sen}(k\theta)\right)$$