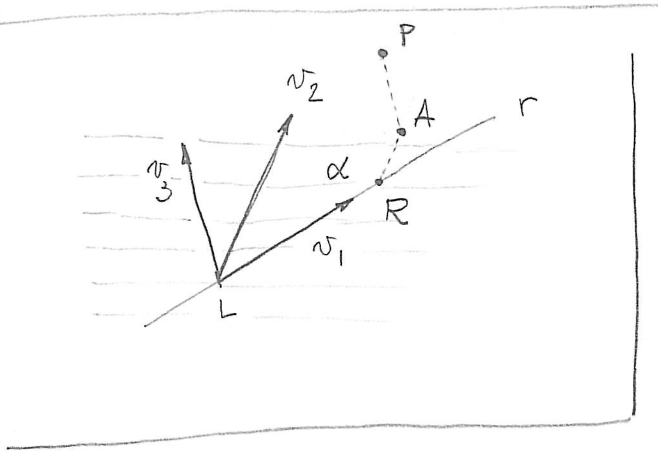
* BASI, COORDINATE *

In V_L si scelgano:

- $v_1 \in V_L$, $\neq 0$; r la retta di v_1
- $v_2 \in V_L$ non su r, ovvero non multiplo di v_1;

  α il piano individuato da v_1 e v_2
- $v_3 \in V_L$ non su α

Oss: r è "la retta dei multipli di v_1",
α è "il piano delle combinazioni lineari di v_1 e v_2"



$v = \vec{LP} \in V_L$

- da P si traccia la parallela a v_3; A il punto in cui incontra α
- da A si traccia la parallela a v_2; R il punto in cui incontra r

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{LR} = \alpha_1 v_1$, $\vec{RA} \sim \alpha_2 v_2$, $\vec{AP} \sim \alpha_3 v_3$
- $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$$\boxed{\forall v \in V_L,\ \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}$$

- $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$
- $\Rightarrow \quad 0 = v - v = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + (\alpha_3 - \beta_3) v_3$

SE $\alpha_3 - \beta_3 \neq 0$ ALLORA $v_3 = -\dfrac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_3 - \beta_3} v_1 - \dfrac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_3 - \beta_3} v_2$

ovvero: v_3 comb. lin. di v_1 e v_2 (v_3 su α)

$\Rightarrow \alpha_3 = \beta_3 \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 = 0$

SE $\alpha_2 - \beta_2 \neq 0$ ALLORA $v_2 = -\dfrac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_2} v_1$

ovvero: v_2 multiplo di v_1 (v_2 su r)

$\Rightarrow \alpha_2 = \beta_2 \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) v_1 = 0$

SE $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$ ALLORA $v_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$

$$\boxed{\forall v \in V_L,\ \exists!\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}$$

- la terna $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una **BASE** di V_L (su $\mathbb{R}$)
- i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ si dicono le **COORDINATE** di v rispetto alla base $\mathcal{B}$

- la colonna $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si dice <u>la</u>

<u>COLONNA DELLE COORDINATE</u> di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si scrive:

$$v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad v \equiv_{\mathcal{B}} \alpha$$

In $\mathbb{C}^2$ (sp vett su $\mathbb{C}$) sia $\mathcal{K} = \left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$

- $\mathcal{K}$ è una base di $\mathbb{C}^2$ (su $\mathbb{C}$)

  (<u>dim</u>: $\forall c \in \mathbb{C}^2, \exists! \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ t.c.

  $$c = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix} \ldots$$

  $$\alpha_1 = \frac{3-i}{5} c_1 + \frac{1-2i}{5} c_2$$

  $$\alpha_2 = \frac{-2-i}{5} c_1 + \frac{1+3i}{5} c_2$$)

- $c \in \mathbb{C}^2$; la colonna delle coordinate di c rispetto alla base $\mathcal{K}$ è

$$c \equiv_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} \frac{3-i}{5} c_1 + \frac{1-2i}{5} c_2 \\ \frac{-2-i}{5} c_1 + \frac{1+3i}{5} c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

Una base più usuale in $\mathbb{C}^2$ è <u>la</u> <u>BASE CANONICA</u>

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- $\forall c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ si ha $\quad c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  dunque: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \equiv_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

In $\mathbb{R}^3$ (sp vett su $\mathbb{R}$); <u>la</u> base canonica è

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si ha ... dunque: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Analogamente, in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$$

è la base canonica

- di $\mathbb{R}^n$ (sp vett su $\mathbb{R}$)
- di $\mathbb{C}^n$ (sp vett su $\mathbb{C}$)

Es: una base più usuale in V_L è ...

V_L sp vett (su $\mathbb{R}$) con p.s., $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V_L (su $\mathbb{R}$).

SE v_1, v_2, v_3 hanno norma uno e sono $\perp$ a coppie, ovvero:

$$v_r \cdot v_s = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

ALLORA $\mathcal{B}$ si dice una base ORTONORMALE di V_L (su $\mathbb{R}$)

$\mathbb{C}^2$ sp vett (su $\mathbb{C}$) con p.h canonico;

- $c \in \mathbb{C}$ t.c. $|c| = 1$
- $v_1 = \begin{pmatrix} c/\sqrt{2} \\ \bar{c}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c/\sqrt{2} \\ -\bar{c}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Es: $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$

Sol: (1) E' una base

(2) $v_r \cdot v_s = \dots$

$\mathbb{R}^2$ sp vett (su $\mathbb{R}$) con p.s canonico;

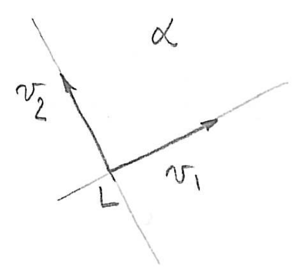
- $\theta \in \mathbb{R}$
- $v_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

Es: $\mathcal{B}_\theta = (v_1, v_2)$, $\mathcal{B}'_\theta = (v_1, v_2')$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n$ sp vett (su $\mathbb{R}$) con ps canonico; $\mathbb{C}^n$ sp vett (su $\mathbb{C}$) con ph canonico; $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ è base o.n.

α piano, $L \in \alpha$, α_L lo sp vett su $\mathbb{R}$ dei vettori di α di penna L, $\bullet$ il p.s. usuale;

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una base o.n di α_L,



$x, z \in \alpha_L$,

$x \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $z \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

si ha:

* $x \cdot z = (x_1 v_1 + x_2 v_2) \cdot (z_1 v_1 + z_2 v_2) = \dots = x_1 z_1 + x_2 z_2$
* $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
* $d(x, z) = \|z - x\| = \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2}$

Es: α piano, $L \in \alpha$, α_L sp vett su $\mathbb{R}$ dei vett di α di penna L.

$v_1, v_2 \in \alpha_L$ t.c.

$$\|v_1\| = 3, \quad \|v_2\| = 4, \quad \text{angolo } v_1 \text{ e } v_2 = \frac{\pi}{3}$$

1) verificare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è base di α_L

2) calcolare:

$$v_1 \equiv_{\mathcal{B}} \,? \qquad v_2 \equiv_{\mathcal{B}} \,? \qquad 3v_1 - 7v_2 \equiv_{\mathcal{B}} \,?$$

3) disegnare:

$$w_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_3 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

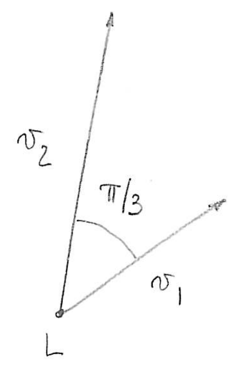
4) siano $h_1, h_2 \in \alpha_L$ i due vettori t.c.

$$h_1, h_2 \perp v_1 \; ; \quad \|h_1\| = \|h_2\| = 5$$

Calcolare: $h_1 \equiv_{\mathcal{B}} \,?$ $\quad h_2 \equiv_{\mathcal{B}} \,?$

Sol:

(1)



Per verificare che (v_1, v_2) è una base di α_L si ripete la costruzione ed il ragionamento fatto per verificare che (v_1, v_2, v_3) è una base di V_L.

(2)

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \Rightarrow v_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \Rightarrow v_2 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3v_1 - 7v_2 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(3)

$$w_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1 = 2v_1 \; \ldots$$

$$w_2 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow w_2 = -4v_2 \; \ldots$$

$$w_3 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow w_3 = 2v_1 - v_2 \; \ldots$$

(4) Posto $h_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ovvero $h_1 = x_1 v_1 + x_2 v_2$

si ha:

$$*) \quad 0 = h_1 \cdot v_1 = x_1 (v_1 \cdot v_1) + x_2 \overbrace{(v_2 \cdot v_1)}^{= \|v_1\| \, \|v_2\| \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = 9x_1 + 6x_2$$

$$*) \quad \|h_1\|^2 = 25 = x_1^2 \|v_1\|^2 + 2x_1x_2 (v_1 \cdot v_2) + x_2^2 \|v_2\|^2$$

$$= 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 16x_2^2$$

Quindi: $x_1 = -\dfrac{6x_2}{9} = -\dfrac{2}{3}x_2$;

$$25 = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}x_2\right)^2 + 12\left(-\frac{2}{3}x_2\right)x_2 + 16x_2^2 =$$

$$= 4x_2^2 - 8x_2^2 + 16x_2^2 = 12x_2^2$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2\sqrt{3}} \quad , \quad x_2 = -\frac{5}{2\sqrt{3}}$$

Allora: $\quad h_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3\sqrt{3}} \\ \frac{5}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ oppure $h_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \frac{5}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

e $h_2 \equiv_{\mathcal{B}} \ldots$ oppure $\ldots$