Oss :

(1) L'ins delle soluz dell' eq.ne

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 7 - 4i$$

nell' incognita $x \in \mathbb{C}^4$, è VUOTO ($\emptyset$).

(2) L'ins delle soluz dell' eq.ne

$$0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

nell' incognita $x \in \mathbb{C}^4$, è $\mathbb{C}^4$; una descrizione parametrica di tale ins è

$$x = r\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

con $r, s, t, u \in \mathbb{C}$.

- Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 = 3 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_4 + 2x_6 = -2 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

di 3 equazioni, nell' incognita $x \in \mathbb{R}^7$

Oss:

(1) nella 1ª equazione l'inc x_2 ha coeff $\neq 0$, mentre nelle eq. successive ha coeff $= 0$;

(2) nella 2ª equazione l'inc x_4 ha coeff $\neq 0$, mentre nelle eq successive ha coeff $= 0$;

(3) nella 3ª eq l'inc x_1 ha coeff $\neq 0$ e non vi sono eq successive

Allora:

- il sistema si dice IN FORMA di GAUSS ;
- x_2, x_4, x_1 si dicono (una scelta di) INCOGNITE di GAUSS ;
- $\forall\, r, s, t, u \in \mathbb{R}$, posto

$$x_3 = r, \quad x_5 = s, \quad x_6 = t, \quad x_7 = u$$

$\exists!\ x_1, x_2, x_4$ t.c. $x = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_7\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7$ sia soluzione.

Infatti, dalla 3ª eq :

$$x_1 = 1 - 3r$$

dalla 2ª eq :

$$x_4 = -(-2 - 2(1-3r) - 4r - 2t) = 4 - 2r + 2t$$

dalla 1ª eq :

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(3 - 3(1-3r) + 3r - (4 - 2r + 2t) + 5s - t\right) = -2 + 7r + \frac{5}{2}s - \frac{3}{2}t$$

Dunque:

$$x = \begin{bmatrix} 1-3r \\ -2+7r+\frac{5}{2}s-\frac{3}{2}t \\ r \\ 4-2r+2t \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} =$$

RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA delle soluzioni

$$= r\begin{bmatrix}-3\\7\\1\\-2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\5/2\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\-3/2\\0\\2\\0\\1\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-2\\0\\4\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \text{con } r, s, t, u \in \mathbb{R}$$

Es $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^6$ Non è in f di Gauss.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ \quad x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad -x_3 = -2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

E' in f di Gauss, le inc di Gauss sono x_1, x_2, x_3.

$\text{III} \Rightarrow x_3 = 2$; $\text{II} \Rightarrow x_2 = 1 + x_3 = 3$; $\text{I} \Rightarrow x_1 = \ldots = \frac{7}{5}$

L'ins delle soluzioni è $x = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^4$$

E' in f di Gauss, le inc di Gauss sono x_1, x_3, x_2.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, posto $x_4 = \alpha$: $\exists!\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ è soluzione.

$\text{III} \Rightarrow x_2 = -1$; $\text{I} \Rightarrow x_3 = x_2 - 2 = -3$; $\text{II} \Rightarrow x_1 = 2 + x_3 = -1$

L'ins delle soluzioni è:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(descrizione parametrica)

PROBLEMA: dato un sistema, trovare un sistema equivalente (ossia con lo stesso insieme di soluzioni) che sia in forma di Gauss.

LEMMA: $\mathbb{K}$ campo, $\mathcal{S}$ sistema di n equazioni nell'incognita $x \in \mathbb{K}^m$.

1) Il sistema $\mathcal{S}'$ ottenuto da $\mathcal{S}$ cambiando l'ordine delle equazioni è equivalente ad $\mathcal{S}$;

Es: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases} : \mathcal{S}$

$\mathcal{S}' : \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2) Il sistema $\mathcal{S}'$ ottenuto da $\mathcal{S}$ cambiando l'ordine degli addendi è equivalente ad $\mathcal{S}$;

Es: $\mathcal{S}' : \begin{cases} -2x_2 + 3x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

3) Siano $h \neq k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Il sistema $\mathcal{S}'$ ottenuto da $\mathcal{S}$ sommando alla k-esima eq.ne il multiplo secondo λ della h-esima eq.ne

è equivalente ad $\mathcal{S}$.

Es: $k=2,\ h=1,\ \lambda=\sqrt{2}$:

$$\mathcal{S}': \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ 3\sqrt{2}\,x_1 + (1-2\sqrt{2})x_2 - x_3 + (1+\sqrt{2})x_4 = \sqrt{2} \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

dim: In tutti i casi $\mathcal{S}'$ è un sistema di n equazioni nell'incognita $x \in \mathbb{K}^m$.
(1) e (2) sono evidenti; (3) si verifica direttamente: se $x \in \mathbb{R}^4$ è una soluzione di $\mathcal{S}$, è anche una soluzione di $\mathcal{S}'$ e viceversa. Q.di $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ sono equivalenti.

Es: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Si consideri il sistema

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = \alpha \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = \beta \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = \gamma \end{cases}$$ nell'inc $x \in \mathbb{C}^3$.

- $\mathrm{I}' = \mathrm{I} + (-2)\mathrm{II}$; $\mathrm{III}' = \mathrm{III} + (-3)\mathrm{II}$:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = \alpha - 2\beta \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = \beta \\ x_2 + 4x_3 = \gamma - 3\beta \end{cases}$$

- $\mathrm{I}' = \mathrm{II}$; $\mathrm{II}' = \mathrm{I}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \beta \\ x_2 + 4x_3 = \alpha - 2\beta \\ x_2 + 4x_3 = \gamma - 3\beta \end{cases}$$

- $\mathrm{III}' = \mathrm{III} + (-1)\mathrm{II}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \beta \\ x_2 + 4x_3 = \alpha - 2\beta \\ 0 \cdot x_3 = \gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

SISTEMA IN FORMA DI GAUSS equivalente ad $\mathcal{S}$.

(A) SE $\gamma - \alpha - \beta = 0$ ALLORA

- $\forall x_3 \in \mathbb{C}$ verifica la III eq
- il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \beta \\ x_2 + 4x_3 = \alpha - 2\beta \end{cases}$$ nell'inc $x \in \mathbb{C}^3$

- $\forall t \in \mathbb{C}$, posto $x_3 = t$: $\exists!\ x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ t.c. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ è soluzione

$\mathrm{II} \Rightarrow \quad x_2 = \alpha - 2\beta - 4t$

$\mathrm{I} \Rightarrow \quad x_1 = \beta + t - 2\alpha + 4\beta + 8t = -2\alpha + 5\beta + 9t$

- rappres param : $x = \begin{bmatrix} -2\alpha + 5\beta + 9t \\ \alpha - 2\beta - 4t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + 5\beta \\ \alpha - 2\beta \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{C}$

(B) SE $\gamma - \alpha - \beta \neq 0$ ALLORA

- $\nexists\, x_3 \in \mathbb{C}$ che verifica la III eq
- l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$ è $\emptyset$

Es: Si cons il sistema

$$\begin{cases} (1+i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 = 2 \\ (2-i)\,x_1 + (1+2i)\,x_3 = i \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{C}^4)$$

- verif che è in f di Gauss
- dare rappres param dell'ins delle soluz.