Si cons $\mathbb{C}^4$; $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$

si pone: $a \circ b = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3 + a_4 \bar{b}_4 \in \mathbb{C}$

[Oss: se $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ la def è coerente con l'analoga in $\mathbb{R}^4$.]

Proprietà:

$\boxed{PH1}$ $\forall a,b,c \in \mathbb{C}^4$, $\alpha \in \mathbb{C}$: $a \circ (b+c) = a \circ b + a \circ c$

$a \circ (\alpha b) = \bar{\alpha} (a \circ b)$

$\boxed{PH2}$ $\forall a,b \in \mathbb{C}^4$: $a \circ b = \overline{(b \circ a)}$

[$\Rightarrow \forall a \in \mathbb{C}^4$, $a \circ a \in \mathbb{R}$]

$\boxed{PH3}$ $\forall a \in \mathbb{C}^4$: $a \circ a \geq 0$ e $a \circ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Oss: $\boxed{PH1}$ e $\boxed{PH2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{PH1'}$ $\forall a,b,c \in \mathbb{C}^4$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

$(a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c$

$(\alpha a) \circ c = \alpha (a \circ c)$

Es: verificare le proprietà

$\boxed{PH1}$, $\boxed{PH1'}$ e $\boxed{PH2}$: HERMITIANA

$\boxed{PH3}$: DEFINITA POSITIVA

$\mathbb{C}^4$, rispetto a $\circ$, è uno SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{C}$ con PRODOTTO HERMITIANO;

$\circ$: prodotto hermitiano CANONICO

1) $\forall a \in \mathbb{C}^4$: $\|a\| = \sqrt{a \circ a} = \sqrt{a_1 \bar{a}_1 + \cdots + a_4 \bar{a}_4} = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_4|^2}$

$\hookrightarrow$ NORMA di a

2) $\forall a,b \in \mathbb{C}^4$: $d(a,b) = \|b - a\| = \sqrt{|b_1 - a_1|^2 + \cdots + |b_4 - a_4|^2}$

$\hookrightarrow$ DISTANZA DI a DA b

3) $a,b \in \mathbb{C}^4$: a,b ORTOGONALI ($a \perp b$) se $a \circ b = 0$
(ovvero $b \circ a = 0$)

4) Teo: $\forall a,b \in \mathbb{C}^4$, $\|b-a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \Leftrightarrow \mathrm{re}(a \circ b) = 0$

[dim: $\|b-a\|^2 = \ldots$]

$\mathbb{C}^n$; $a,b \in \mathbb{C}^n$; $a \circ b = a_1 \bar{b}_1 + \cdots + a_n \bar{b}_n \in \mathbb{C}$

$\circ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ verifica $\boxed{PH1} - \boxed{PH3}$

e si dice PRODOTTO HERMITIANO CANONICO in $\mathbb{C}^n$;

$\mathbb{C}^n$ con $\circ$ risulta uno sp vett su $\mathbb{C}$ con pr hermitiano

---

NORMA e METRICA

V sp vett su $\mathbb{C}$ con p.h.
(ovvero con $\circ : V \times V \to \mathbb{C}$ t.c. $\boxed{PH1} - \boxed{PH3}$)

TEO: $v \in V$ elem non nullo di V, $w \in V$.

$\exists!\ w', h \in V$ t.c.

(1) w' è un multiplo di v
(2) $h \perp v$
(3) $w' + h = w$

w': PROIEZIONE ORTOGONALE di w su v;

h: COMPONENTE NORMALE di w risp a v.

dim: (A) $w' = \alpha v$, h che verificano (1) – (3).

Allora: $h = w - \alpha v$ e $h \cdot v = 0$ ovvero

$(w - \alpha v) \cdot v = 0$ cioè $w \cdot v = \alpha (v \cdot v)$

dunque: $\alpha = \dfrac{w \cdot v}{v \cdot v}$ (si ha $v \cdot v = \|v\|^2 \neq 0 \ldots$)

Ne segue:

$$\boxed{w' = \frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v \quad , \quad h = w - \frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v}$$

(B) (1) $w' = \dfrac{w \cdot v}{\|v\|^2} v$ è multiplo di v

(2) $h \cdot v = w \cdot v - \dfrac{w \cdot v}{\|v\|^2} \|v\|^2 = 0$: è $h \perp v$

(3) $w' + h = w$ è vero.

TEO (disuguaglianza di Schwarz): $v, w \in V$;

si ha: $|v \cdot w| \leq \|v\| \, \|w\|$

---

dim: (A) se $v = 0$ l'asserto è vero.

(B) $v \neq 0$, w' e h pr ort e comp normale di w su v. Allora:

$$\|w\| = \|w' + h\| = \sqrt{(w'+h) \cdot (w'+h)} =$$

$$= \sqrt{\|w'\|^2 + w' \cdot h + h \cdot w' + \|h\|^2}$$

$$= \sqrt{\|w'\|^2 + \|h\|^2} \quad (\text{perché } w' \perp h)$$

$$\geq \|w'\| = \left\| \frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v \right\|.$$

MA: $\forall v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha: $\|\alpha v\| =$

$$= \sqrt{(\alpha v) \cdot (\alpha v)} = \sqrt{|\alpha|^2 (v \cdot v)} = |\alpha| \, \|v\|$$

q.d.: $\|w\| \geq \dfrac{|w \cdot v|}{\|v\|}$ e $\|v\| \, \|w\| \geq |w \cdot v|$

Proprietà:

$\boxed{N1}$ $\forall v \in V$: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\boxed{N2}$ $\forall v \in V$, $c \in \mathbb{C}$: $\|cv\| = |c| \, \|v\|$

$\boxed{N3}$ $\forall v, w \in V$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

---

dim: si oss che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{re}(a + ib) = a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|$$

Allora: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \, \mathrm{re}(v \cdot w)$

$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 |v \cdot w|$

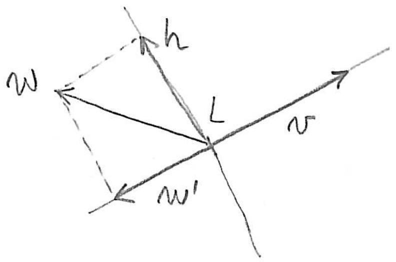
$\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|v\| \, \|w\|$ (Schwarz!)

$= (\|v\| + \|w\|)^2$

Oss: se V sp vett su $\mathbb{R}$ con p.s. ...

In part: V_L (sp vett su $\mathbb{R}$) con p.s:

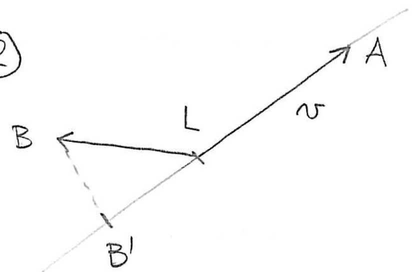
(1)



$v \neq 0$, $w \in V_L$

$\exists!\ w', h$ t.c. ...

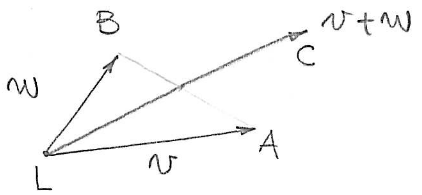
(2)



$v \neq 0$, $w \in V_L$

$$|v \cdot w| = |\overline{LA} \cdot \overline{LB'} \cdot \delta| \leq \overline{LA} \cdot \overline{LB} = \|v\|\,\|w\|$$

(3)



$$\|v+w\| = \overline{LC} \leq \overline{LA} + \overline{LB} = \|v\| + \|w\|$$