$A \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $b \in \mathbb{C}^m$

$U = (u_1, \dots, u_m)$, Σ, $V = (v_1, \dots, v_k)$ dec val sing di A

(se A ad elem reali, lo stesso per U, V)

- $F(x) = \| Ax - b\|^2$, $G(x') = \| \Sigma x' - b' \|^2$

  $Vx' = x$, $Ub' = b \Rightarrow F(x) = G(x')$

  $\left[\|Ax-b\|^2 = \|U\Sigma V^H x - b\|^2 = \|U(\Sigma(V^H x) - U^H b)\|^2 = \dots \right]$

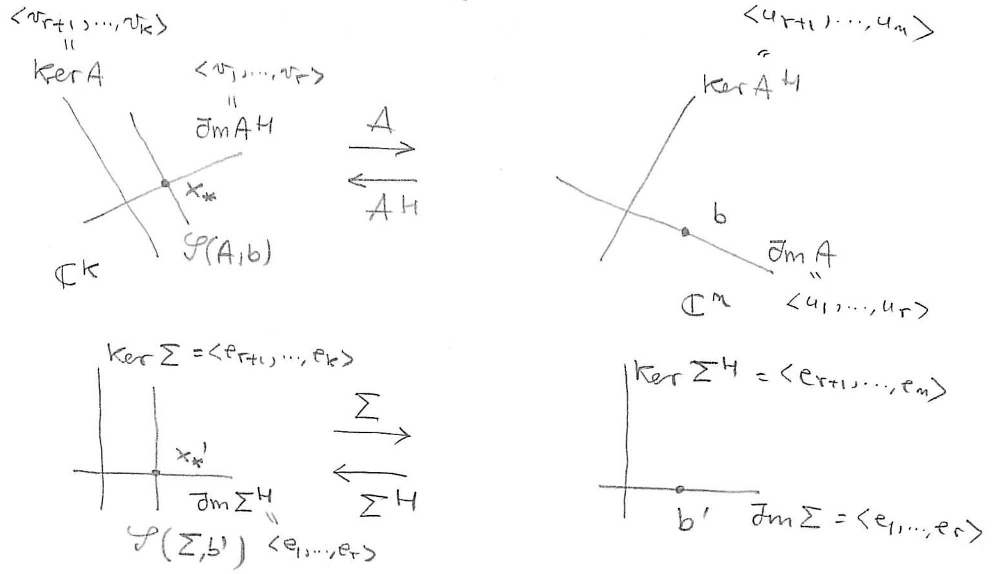
- $x \in \mathcal{S}(A,b) \Leftrightarrow x' \in \mathcal{S}(\Sigma, b')$; $x \in \mathcal{S}_{MQ}(A,b) \Leftrightarrow x' \in \mathcal{S}_{MQ}(\Sigma, b')$
- $b \notin \operatorname{Im} A$ e β la comp di b su $\operatorname{Im} A$:

  $$x \in \mathcal{S}_{MQ}(A,b) \Leftrightarrow x \in \mathcal{S}(A,\beta) \Leftrightarrow x' \in \mathcal{S}(\Sigma, \beta') = \mathcal{S}_{MQ}(\Sigma, b')$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b = \underset{\operatorname{Im} A}{\beta} + \underset{\ker A^H}{\nu} \\ \hline b' = \underset{\operatorname{Im}\Sigma}{\beta'} + \underset{\ker \Sigma^H}{\nu'} \end{array} \quad \text{coord risp } u_1, \dots, u_m}$$

(I) $b \in \operatorname{Im} A$

- $\mathcal{S} \neq \emptyset$
- $b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$



- $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ v.s. non nulli di A; posto...

$$x'_* = \begin{bmatrix} b'_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ b'_r/\sigma_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left| \quad \begin{array}{l} \Sigma x' = b' \dots \\ \left.\begin{array}{l} \sigma_1 x'_1 = b'_1 \\ \quad \vdots \\ \sigma_r x'_r = b'_r \end{array}\right\} r \\ \left.\begin{array}{l} 0 = 0 \\ \quad \vdots \\ 0 = 0 \end{array}\right\} n-r \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x'_* \in \mathcal{S}(\Sigma, b') \Rightarrow \mathcal{S}(\Sigma, b') = x'_* + \ker \Sigma$

- $x'_* \in \operatorname{Im} \Sigma^H \Rightarrow x'_*$ elem di $\mathcal{S}(\Sigma, b')$ di minima norma euclidea.

- <u>def</u> $\Sigma^+ \in \mathbb{C}^{k\times m}$ t.c.

$$\sigma^+_{ij} = \begin{cases} 1/\sigma_k & i = j = k \in \{1, \dots, r\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left[\text{Es: } \Sigma = \begin{bmatrix} \overset{\neq 0}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$\Rightarrow x'_* = \Sigma^+ b'$

- x'_* elem di $\mathcal{S}(\Sigma, b')$ di minima norma euclidea

  $\Leftrightarrow x_* = Vx'_*$ elem di $\mathcal{S}(A,b)$ di minima norma eucl.

$$\boxed{\begin{array}{l} (\Rightarrow) \quad w \in \mathcal{S}(A,b), \; w' = V^H w \in \mathcal{S}(\Sigma, b') \\ \|w\|^2 = \|Vw'\|^2 \underset{V \text{ unit}}{=} \|w'\|^2 \underset{x'_* \dots}{\geq} \|x'_*\|^2 = \|V^H x_*\|^2 \underset{V^H \text{ unit}}{=} \|x_*\|^2 \end{array}}$$

- $x_* = Vx'_* = V\Sigma^+ b' = V\Sigma^+ U^H b$

(II) $b \notin \mathrm{Im}\, A$

- $$b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} = \underset{\mathrm{Im}\,\Sigma}{\beta'} + \underset{\ker \Sigma^H}{\nu'}$$

- $x'_* = \Sigma^+ b' \Rightarrow x'_* = \Sigma^+ \beta' \in \mathcal{S}(\Sigma, \beta') = \mathcal{S}_{MQ}(\Sigma, b')$

  e x'_* è l'elem di minima norma euclidea
  ($x'_* \in \mathrm{Im}\, \Sigma^H$)

- x'_* è l'elem di minima norma euclidea di $\mathcal{S}_{MQ}(\Sigma, b')$

  $\Leftrightarrow$ $x_* = V x'_*$ è l'elem di minima norma eucl. di $\mathcal{S}_{MQ}(A, b)$

- $x_* = V x'_* = V \Sigma^+ b' = \boxed{V \Sigma^+ U^H b}$

---

def: $A \in \mathbb{C}^{m \times k}$; U, Σ, V una decomp ai v.s di A

$$A^+ = V \Sigma^+ U^H \in \mathbb{C}^{k \times m}$$

si dice <u>matrice PSEUDOINVERSA</u> di A; l'elem di $\mathcal{S}_{MQ}(A, b)$ di minima norma euclidea è

$$x_* = A^+ b$$

Es: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile; U, Σ, V decomp v.s di A

Verif. che:
- $\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$
- $A^+ A = I$ (e q.di $A^+ = A^{-1}$)

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $b \in \mathrm{Im}\, A \Rightarrow \mathcal{S}(A, b) \neq \emptyset$
- $\dim \ker A = 1 \Rightarrow \mathcal{S}(A, b)$ ha infiniti elementi

determ l'elem di $\mathcal{S}(A, b)$ di norma minima

Sol:
- determ decompos v.s di A
- determ A^+
- calcolare $x_* = A^+ b$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $b \notin \mathrm{Im}\, A \Rightarrow \mathcal{S}(A, b) = \emptyset$
- $\dim \ker A = 1 \Rightarrow \mathcal{S}_{MQ}(A, b)$ ha infiniti elem

determ l'elem di $\mathcal{S}_{MQ}(A, b)$ di norma minima.

Sol: come sopra.

Es: Determ la retta che meglio approssima i dati
$(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$
nel senso dei m.q

Sol: Si trasf il pb nella solut di $Ax = b$ nel senso dei m.q.