PRODOTTO SCALARE

Scelta una unita' di misura per i segmenti, indichiamo con $\overline{AB}$ la lunghezza del segmento AB.

---

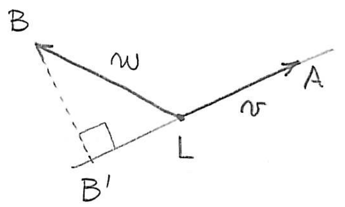
def (prodotto scalare in V_L)

$v = \overrightarrow{LA}$, $w = \overrightarrow{LB}$ $\in V_L$

$v \circ w$ e' l'elemento di $\mathbb{R}$ def da:

(I) se $v = 0$ allora $v \circ w = 0$

(II) se $v \neq 0$, detta $\overrightarrow{LB'}$ la proiez ortogonale di $\overrightarrow{LB}$ sulla retta per L ed A, allora:



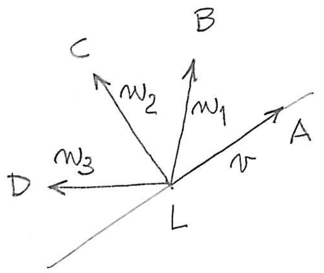
$$v \circ w = \overline{LA} \cdot \overline{LB'} \cdot \delta$$

con

$$\delta = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \text{a seconda che } B' \begin{cases} \in \text{semiretta} \ni A \\ = L \\ \in \text{semiretta} \not\ni A \end{cases}$$

Il numero reale $v \circ w$ si dice il prodotto scalare di v e w.

Es:



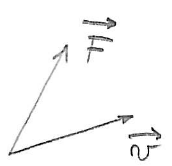
$v \circ w_1 > 0$

$v \circ w_2 = 0$

$v \circ w_3 < 0$

in fisica:

· potenza di una forza



$$p = \vec{F} \circ \vec{v}$$

Proprieta'

$$\circ : V_L \times V_L \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (v, w) \longrightarrow v \circ w$$

$\boxed{PS1}$ $\forall\, v, w, z \in V_L$, $a \in \mathbb{R}$:

$$v \circ (w + z) = v \circ w + v \circ z$$
$$v \circ (a w) = a (v \circ w)$$

$\boxed{PS2}$ $\forall\, v, w \in V_L$: $\quad v \circ w = w \circ v$

$\boxed{PS3}$ $\forall\, v \in V_L$: $\quad v \circ v \geq 0$, $\quad v \circ v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Oss: $\boxed{PS1}$ e $\boxed{PS2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{PS1'}$ $\forall\, v, w, z \in V_L$, $a \in \mathbb{R}$:

$$(v + w) \circ z = v \circ z + w \circ z$$
$$(a v) \circ z = a (v \circ z)$$

$\boxed{\text{Es: verificare!}}$

$\boxed{PS1}$, $\boxed{PS1'}$: BILINEARE

$\boxed{PS2}$: SIMMETRICA

$\boxed{PS3}$: DEFINITA POSITIVA

Es: $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in V_L$

$$(a v) \circ (b w) = $$
$$= a b (v \circ w)$$

---

def (norma in V_L)

$v = \overrightarrow{LA} \in V_L$: $\quad \sqrt{v \circ v}$

- si denota con $\|v\|$
- si dice norma di v
- vale $\overline{LA}$

(si ricordi che $v \circ v \geq 0$)

def (distanza tra punti):

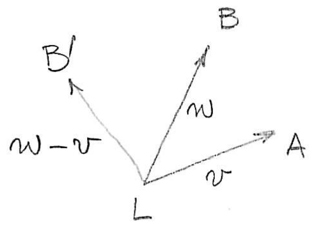
A, B punti dello spazio

$$d(A,B) = \text{distanza di } A \text{ da } B = \overline{AB}$$

---

def (distanza in V_L):

$v = \overrightarrow{LA}$, $w = \overrightarrow{LB}$: $\boxed{d(v,w) = \| w - v \|}$



posto $\overrightarrow{LB'} \sim \overrightarrow{AB}$ si ha $\overrightarrow{LB'} = w - v$

e $\| w - v \| = \overline{LB'} = \overline{AB}$

$\Rightarrow d(v,w) = d(A,B)$

---

def (vettori ortogonali): $v, w \in V_L$

si dicono ortogonali e si scrive $v \perp w$

se $v \bullet w = 0$

Oss: $v \bullet w = 0 \iff v = 0$ o $w = 0$ o $v \neq 0, w \neq 0$ e perpendicolari.

TEO (Pitagora): $v, w \in V_L$

Si ha: $\| w - v \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2 \iff v \perp w$

dim:

$$\| w - v \|^2 = (w - v) \bullet (w - v) = w \bullet w - v \bullet w - w \bullet v + v \bullet v$$

$$= \dots = \| w \|^2 + \| v \|^2 - 2 (v \bullet w) \quad \text{q.di} \dots$$

V_L è sp vett su $\mathbb{R}$

e l'applicazione $\bullet : V_L \times V_L \to \mathbb{R}$

verifica $\boxed{PS1} - \boxed{PS3}$

V_L (rispetto a $\bullet$) è uno SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$ CON PRODOTTO SCALARE

Si cons $\mathbb{R}^4$; $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

si pone: $a \bullet b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \in \mathbb{R}$

1) si verifica che $\mathbb{R}^4$, rispetto a $\bullet$, è uno sp vett su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare.

2) $\| a \| = \sqrt{a \bullet a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$, norma di a

3) $d(a,b) = \| b - a \| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_4 - a_4)^2}$

4) a, b ortogonali $(a \perp b)$ se $a \bullet b = 0$

5) **TEO**: $\forall v, w \in \mathbb{R}^4$, $\| w - v \|^2 = \| w \|^2 + \| v \|^2 \iff v \perp w$.

$\mathbb{R}^n$; $a, b \in \mathbb{R}^n$; $a \bullet b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifica $\boxed{PS1} - \boxed{PS3}$

e si dice PRODOTTO SCALARE CANONICO in $\mathbb{R}^n$

quindi: $\mathbb{R}^n$, rispetto a $\bullet$, risulta uno spazio vett su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare.

Es: $\mathbb{R}^2$ con ps canonico;

1) determinare tutti gli elementi $x \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$x \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

2) tra gli elementi trovati, indicare quelli di norma unitaria.