## SPAZI VETTORIALI DI MATRICI

- $\mathbb{K}$ campo ( $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ... )

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{47} \end{bmatrix}$, $\forall a_{ij} \in \mathbb{K}$, si dice matrice $4 \times 7$ o matrice con 4 righe e 7 colonne ad elementi in $\mathbb{K}$.

- $\mathbb{K}^{4\times 7}$ è l'ins di tutte le matrici $4 \times 7$ ad elem in $\mathbb{K}$.

Es: $\begin{pmatrix} 3 & \pi & -1 \\ \sqrt{2} & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ; $\begin{pmatrix} 6-i & 0 \\ 1 & 3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

- SOMMA di matrici di $\mathbb{K}^{4\times 7}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{41} & \cdots & b_{47} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 7}$$

si def:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{17}+b_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41}+b_{41} & \cdots & a_{47}+b_{47} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 7}$$

- MULTIPLO di una matrice di $\mathbb{K}^{4\times 7}$ secondo un elem di $\mathbb{K}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 7}, \quad a \in \mathbb{K}$$

si def:

$$aA = \begin{bmatrix} a\,a_{11} & \cdots & a\,a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a\,a_{41} & \cdots & a\,a_{47} \end{bmatrix}$$

Oss: $\mathbb{K}^{4\times 7}$, rispetto alla somma + ed alla formazione di multipli secondo elem di $\mathbb{K}$, risulta uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$

Es: Si cons $\mathbb{R}^{3\times 2}$.
- l'elem neutro di + è...
- $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ; l'opposto di $A$ è...

- $n$ intero $\geq 1$ : $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n\times 1}$ è lo spazio vettoriale (su $\mathbb{K}$) delle colonne costituite da $n$ elem di $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}^{1\times n}$ è lo spazio vettoriale (su $\mathbb{K}$) delle righe costituite da $n$ elem di $\mathbb{K}$.

Es: $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ , $\left(4, \frac{7}{6}, -1, 0\right) \in \mathbb{Q}^{1\times 4}$

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 7}$ ;

- posto $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{41} \end{bmatrix}, \dots, a_7 = \begin{bmatrix} a_{17} \\ \vdots \\ a_{47} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^4$, $A$ si riscrive:

$$A = (a_1, \dots, a_7)$$

- posto $a'_1 = (a_{11}, \dots, a_{17}), \dots, a'_4 = (a_{41}, \dots, a_{47}) \in \mathbb{K}^{1\times 7}$

  $A$ si riscrive: $\quad A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_4 \end{bmatrix}$

- ciò posto:

  se $A = (a_1, \dots, a_7)$, $B = (b_1, \dots, b_7) \in \mathbb{K}^{4\times 7}$, $a \in \mathbb{K}$

  si ha: $A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_7 + b_7)$

  $aA = (a a_1, \dots, a a_7)$

  se $A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 7}$, $a \in \mathbb{K}$

  si ha: $A + B = \begin{bmatrix} a'_1 + b'_1 \\ \vdots \\ a'_4 + b'_4 \end{bmatrix}$, $aA = \begin{bmatrix} a a'_1 \\ \vdots \\ a a'_4 \end{bmatrix}$

Es. $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^4$. Determinare gli $x \in \mathbb{R}^4$ t.c. $ax = v$

Sol:
- se $a = 0$ e $v \neq 0$, $\nexists$ soluzioni
- se $a = 0$ e $v = 0$, ogni $x \in \mathbb{R}^4$ è soluzione
- se $a \neq 0$, $x = a^{-1} v$ è l'unica soluzione.

  esiste perché $\mathbb{R}$ è un campo

Ragionamento:

SE $\exists x$ soluzione ALLORA:

$$ax = v \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}v \Rightarrow (a^{-1}a)x = a^{-1}v$$
$$\Rightarrow 1x = a^{-1}v \Rightarrow x = a^{-1}v$$

INOLTRE: $a(a^{-1}v) = (aa^{-1})v = 1v = v$

(cioè $a^{-1}v$ è soluzione)

QUINDI: $x = a^{-1}v$ è l'unica soluzione.

Es: $\mathbb{Z}^{3\times 2}$ ins delle matrici $3\times 2$ ad elem in $\mathbb{Z}$

- $A, B \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$, $a \in \mathbb{Z}$:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix}, \quad aA = \begin{bmatrix} a a_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

- $\mathbb{Z}^{3\times 2}$ con la somma e la formazione di multiplo secondo elem di $\mathbb{Z}$ verifica tutte le S.1 – S.4, M.1 – M.4 MA non è uno spazio vettoriale perché $\mathbb{Z}$ non è un campo.

- $a = 3 \in \mathbb{Z}$, $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$.

$$\boxed{\nexists\, x \in \mathbb{Z}^{3\times 2} \text{ t.c. } ax = v}$$