AL & FG [3][4][5] / 9 marzo 2011 / C41

Oss: $A = \{ (a,0),\ a \in \mathbb{R} \}$ è un sottoins di $\mathbb{C}$.

- $\forall a,b \in \mathbb{R}$: $(a,0) = (b,0) \Leftrightarrow a = b$
  $(a,0) + (b,0) = (a+b, 0) \in A$
  $(a,0) \cdot (b,0) = (ab, 0) \in A$
- $(0,0) \in A$; $(1,0) \in A$;
- se $x \in A$ allora l'opposto $-x$ e l'inverso x^{-1} (se $\exists$) sono in A

dunque A è un campo (un sottocampo di $\mathbb{C}$): precisamente è il campo reale $\mathbb{R}$. Questo consente di indicare gli elem di $\mathbb{C}$ della forma $(a,0)$ con il solo numero reale a.

Es: $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ significa $(\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ significa $\{(a,0),\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$
$3(6,-1) + 4$ significa $(3,0)(6,-1) + (4,0)$

Oss: Indicando con i la coppia $(0,1) \in \mathbb{C}$ si ha:

- $i \notin \mathbb{R}$, $i^2 = i \cdot i = (-1,0) = -1$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$: $a + ib = (a,b)$
  $[a + ib = (a,0) + (0,1)(b,0) = \dots]$
- $\forall c \in \mathbb{C}$, $\exists!\ a,b \in \mathbb{R}$ t.c. $c = a + ib$
  a: PARTE REALE di c, $re(c)$
  b: PARTE IMMAGINARIA di c, $im(c)$
- la rappres di c nella forma $c = a + ib$ si chiama RAPPRESENTAZIONE ALGEBRICA di c

Es: • $(4 + 2i) + (\sqrt{2} + 6i) =$
$= 4 + 2i + \sqrt{2} + 6i = 4 + \sqrt{2} + 2i + 6i$
$= (4 + \sqrt{2}) + (2+6)i = (4 + \sqrt{2}) + 8i$

• $(2+i)(-3+i) = 2 \cdot (-3+i) + i(-3+i) =$
$= 2 \cdot (-3) + 2i + i(-3) + i^2 =$
$= -6 + 2i - 3i - 1 = -7 - i$

• $(1+i)^{-1}$ esiste perché $1+i \neq 0$ e $\mathbb{C}$ è un campo. E' l'inverso di $1+i$:
$\alpha + i\beta$ t.c. $(1+i)(\alpha + i\beta) = 1$
da cui: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$
cioè:
$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$$

def (CONIUGATO): $c = a + ib \in \mathbb{C}$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$.

L'elem $a - ib \in \mathbb{C}$ si indica con $\bar{c}$ e si dice il coniugato di c..

Proprieta': $c, d \in \mathbb{C}$

- $\dfrac{c+\bar{c}}{2} = re(c)$; $\dfrac{c-\bar{c}}{2i} = im(c)$
- $c\bar{c} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ | Oss: $c\bar{c} \geq 0$, $c\bar{c} = 0 \Leftrightarrow c = 0$
- $\overline{c+d} = \bar{c} + \bar{d}$; $\overline{cd} = \bar{c}\,\bar{d}$
- $(\bar{c})^{-} = c$
- $c \neq 0$: $(\bar{c})^{-1} = (c^{-1})^{-}$ [Infatti...]

Oss: (1) $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c = \bar{c}$

(2) $c \neq 0$: $c^{-1} = \dfrac{\bar{c}}{\bar{c}c} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\, i$

def (MODULO): $\sqrt{\bar{c}c} = \sqrt{a^2+b^2} = |c|$ modulo di c

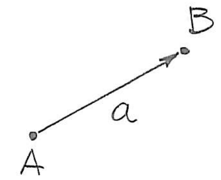
Oss: se $c \in \mathbb{R}$, $|c|$ è il valore assoluto di c

Es: $c = 3 - 2i$

- $\bar{c} = \dots$; $c + \bar{c} = \dots$; $c - \bar{c} = \dots$
- $|c| = \dots$; $c^{-1} = \dots$

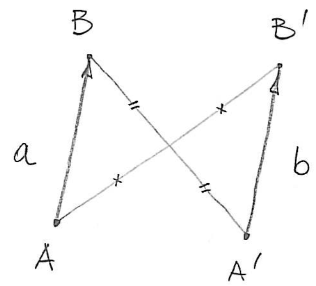
SPAZI VETTORIALI

def (VETTORE)



a: freccia di penna A e punta B

- si denota con $\overrightarrow{AB}$
- si dice vettore di penna A e punta B.



def (vettori EQUIVALENTI)

$a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{A'B'}$ sono equivalenti (si scrive $a \sim b$) se i segmenti AB', $A'B$ hanno lo stesso punto medio

Oss: $a \sim a$; $a \sim b \Rightarrow b \sim a$; $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

L punto dello spazio.

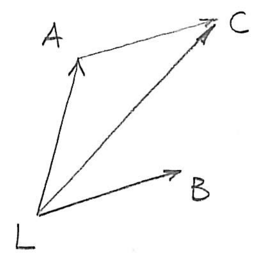
$V_L = \{ \overrightarrow{LA} : A$ punto dello spazio $\}$

= "ins dei vettori di penna L".

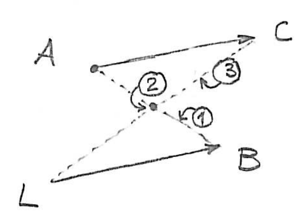
- SOMMA di vettori di V_L:

$\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LB} \in V_L$; costruito $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{LB}$ si pone

$$\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{LC}$$



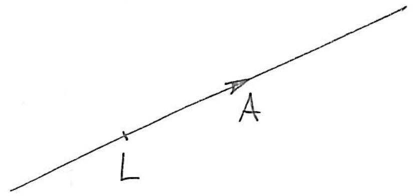
Oss: $\overrightarrow{AC}$ si costruisce così:



• MULTIPLO di un vettore di V_L:

$\overrightarrow{LA} \in V_L$, $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>SE</u> $L \neq A$ si cons il p.to B della retta per L ed A t.c.



1) lungh segm LB = $|\alpha|$ lungh segm LA

2) $B \in$ semiretta di origine L $\begin{cases} \ni A & \text{se } \alpha > 0 \\ \not\ni A & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

3) $B = L$ se $\alpha = 0$

... e si pone $\alpha \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LB}$

<u>SE</u> $L = A$ si pone $\alpha \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{LL}$

$\alpha \overrightarrow{LA}$ si dice <u>il multiplo di $\overrightarrow{LA}$ secondo α</u>.

Proprieta' di +

$\boxed{S.1}$ $\forall a, b, c \in V_L$: $(a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIATIVA

$\boxed{S.2}$ $\forall a, b \in V_L$: $a+b = b+a$ COMMUTATIVA

$\boxed{S.3}$ $\exists! \, \omega \in V_L$: $\forall a \in V_L$ si ha $a + \omega = a$ ELEMENTO NEUTRO...

[$\omega = \overrightarrow{LL}$, si denota con 0 e si dice di +]

$\boxed{S.4}$ $\forall a \in V_L$, $\exists! \, a' \in V_L$ t.c. $a + a' = 0$ OPPOSTO

a' è il simm di a risp ad L ; si <u>denota</u> con $-a$
e si dice l'opposto di a ;
$a - b$ denota $a + (-b)$

<u>Es</u>: $a, b \in V_L$; $-(-a) = a$, $-(a+b) = -a-b$

Proprieta' di ·

$\boxed{M.1}$ $\forall a \in V_L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$

$\boxed{M.2}$ $\forall a, b \in V_L$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

$\boxed{M.3}$ $\forall a \in V_L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$

$\boxed{M.4}$ $\forall a \in V_L$: $1a = a$

<u>Oss</u>: dati $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ e $a_1, \dots, a_m \in V_L$
l'elemento di V_L dato da

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$$

si dice <u>combinazione lineare</u> di $a_1, \dots, a_m$
<u>a coefficienti</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Struttura algebrica :

un insieme A con somma e multiplo secondo un elemento di $\mathbb{R}$ che verificano S.1 – S.4 e M.1 – M.4 si dice <u>SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{R}$</u>.