$\mathbb{C} = \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{R} \}$ "INSIEME dei NUMERI COMPLESSI"

(=) $(a,b) = (c,d)$ significa $a=c,\ b=d$

(+) $(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$; $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

(·) $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$; $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

PROPRIETÀ:

$\boxed{S.1}$ $\forall\, a,b,c \in \mathbb{C}$: $(a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIATIVA

$\boxed{S.2}$ $\forall\, a,b \in \mathbb{C}$: $a+b = b+a$ COMMUTATIVA

$\boxed{S.3}$ $\exists!\ \omega \in \mathbb{C}$: $\forall a \in \mathbb{C}$ si ha $a+\omega = a$ ELEMENTO NEUTRO...

[$\omega = (0,0)$; si denota con 0 ; si dice ... di +]

$\boxed{S.4}$ $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists!\ a' \in \mathbb{C}$ t.c. $a+a' = 0$ OPPOSTO

[$a = (a_1,a_2)$, $a' = (-a_1,-a_2)$;
a' si denota con $-a$; si dice ... di a ;
$a-b$ denota $a+(-b)$;]

$\boxed{P.1}$ $\forall\, a,b,c \in \mathbb{C}$: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ ASSOCIATIVA

[$a\cdot b$ si denota anche ab]

$\boxed{P.2}$ $\forall\, a,b,c \in \mathbb{C}$: $(a+b)c = ac+bc$, $a(b+c) = ab+bc$ DISTRIBUTIVITÀ...

$\boxed{P.3}$ $\exists!\ u \in \mathbb{C}$: $\forall a \in \mathbb{C}$ si ha $a\cdot u = a$ ELEMENTO NEUTRO...

[$u = (1,0)$; si denota con 1 ; si dice ... di $\cdot$]

$\boxed{P.4}$ $\forall a,b \in \mathbb{C}$: $ab = ba$ COMMUTATIVITÀ

$\boxed{P.5}$ $\forall a \in \mathbb{C}$ t.c. $a \neq 0$, $\exists!\ a'' \in \mathbb{C}$ t.c. $aa'' = 1$ INVERSO...

[$a = (a_1,a_2)$; $a \neq 0 \Rightarrow a_1^2+a_2^2 \neq 0$;
$a'' = \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} , -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2} \right)$; si denota con a^{-1} o $\frac{1}{a}$;
si dice inverso di a ; $\frac{a}{b}$ denota ab^{-1}]

Oss: $1 \neq 0$

Es: $a,b \in \mathbb{C}$

1) $-(a+b) = -a-b$

2) $a\cdot 0 = 0$

3) $a(-b) = -(ab)$

4) sia $a \neq 0$; $a^{-1} \neq 0$ e $(a^{-1})^{-1} = a$

5) siano $a\neq 0,\ b\neq 0$; $ab \neq 0$ e $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Oss : $\forall a,b,c \in \mathbb{C}$ si ha : $a=b \Rightarrow$ $a+c = b+c$, $ac = bc$

SOL :

1) $(a+b)+x = 0 \sim a+(b+x) = 0 \sim b+x = -a$

$\Rightarrow \underbrace{-b+(b+x)}_{(-b+b)+x\ =\ x} = -b-a = -a-b$

2) $(a_1,a_2) = a$, $(0,0) = 0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0$

3) $b-b = 0 \Rightarrow a(b-b) = a\cdot 0 = 0 \Rightarrow ab + a(-b) = 0 \Rightarrow$ ...

4) $a^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} , -\frac{a_2}{a_1^2+a_2^2} \right)$; $\frac{a_1^2}{(a_1^2+a_2^2)^2} + \frac{a_2^2}{(a_1^2+a_2^2)^2} = \frac{1}{a_1^2+a_2^2} \neq 0$

$$a^{-1}x = 1 \Rightarrow \underbrace{a(a^{-1}x)} = a\cdot 1 = a$$

$$(aa^{-1})x = 1\cdot x = x$$

5) $(ab)x = 1 \sim a(bx) = 1 \sim bx = a^{-1}$

$$\Rightarrow \underbrace{b^{-1}(bx)} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$(b^{-1}b)x = 1\cdot x = x$$

<u>Oss</u>: $a \in \mathbb{C}$; $\exists$ inverso di $a \Rightarrow a \neq 0$

(Per assurdo: se $a = 0$ allora $\forall b \in \mathbb{C}$, $ab = 0$)

STRUTTURE (algebriche):

Un insieme con somma e prodotto t.c.

- S.1 – S.4, P.1 e P.2 si dice <u>ANELLO</u>
  - e P.3 si dice <u>A. CON IDENTITA'</u>
  - e P.4 si dice <u>A. COMMUTATIVO</u>
- A. COMMUTATIVO CON ID e P.5, Oss: <u>CAMPO</u>

> $\mathbb{C}$ è il CAMPO COMPLESSO
> (dei numeri complessi)

> <u>Es</u>: $\mathbb{N}$ (ins numeri naturali) <u>non è</u> anello;
> $\mathbb{Z}$ (ins numeri interi) è un anello commu con id, ma <u>non</u> un campo;
> $\mathbb{Q}$ (ins numeri razionali), $\mathbb{R}$ sono campi.