

Prove scritte di Matematica (Ing. Informatica)

versione 1 (1-4-2004)

AVVISO: La raccolta contiene tutti i testi disponibili ma e' incompleta; ogni integrazione e' gradita.

1. Determinare, se esistono, per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y = \lambda \\ 3x + \lambda y = 3\lambda \end{cases}$$

ammette più di una soluzione.

2. Stabilire se le due rette

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \sigma(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$, siano complanari o sghembe.

3. Risolvere in \mathbb{C} l'equazione $z^2 = \bar{z}^2$

4. Determinare il minimo $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$\lg(1+x) \leq \lambda + x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

5. Stabilire se

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$$

sia o no convergente e calcolarlo.

6. Stimare l'errore che si commette sostituendo 10^{-2} a $\sin(10^{-2})$.

7. Determinare modulo e argomento della somma e del prodotto dei numeri $(1 + i)$ e $(-2 + i)$

8. Dati

$$A = (2, 3, 1)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare AA^T , $A^T A$, AB^{-1} .

9. Discutere la risolubilità, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, del sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = \lambda \end{cases}$$

10. Determinare tutte le primitive di $\frac{x^2+x+1}{x^3+x}$

11. Determinare l'immagine della funzione $f(x) = x^2 \lg x$

12. Provare, studiando la funzione a primo membro, che

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

13. Determinare tutte le primitive di $\sqrt{3x-2-x^2}$

14. Studiare la convergenza di

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \sin a_n \end{cases}$$

15. Studiare l'integrabilità di $\frac{\pi}{2} - \arctg x^2$ su $[0, +\infty[$

16. Stabilire se il piano

$$2x + y + z = 1$$

e la retta

$$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

siano o no paralleli od ortogonali.

17. Studiare la risolubilità di

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ -x + y = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

18. Completare il sistema

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in modo da ottenere un sistema di generatori per \mathbb{R}^4 . Il sistema così ottenuto è una base?

19. Determinare, al tendere di x a $+\infty$, l'ordine di infinitesimo di

$$\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x$$

rispetto a $1/x$.

20. Calcolare, se esiste, l'integrale $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} dx$

21. Studiare, per $\lambda \geq 2$, la successione

$$a_0 = \lambda \qquad a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

22. Sia A una matrice $n \times m$, e sia (e_i) la base canonica in \mathbb{R}^m . Calcolare il prodotto Ae_i ; determinare poi l'immagine dell'applicazione lineare generata da A .

23. Determinare tutte le soluzioni complesse di $z^4 = z$.

24. Scrivere l'equazione di una retta in \mathbb{R}^3 , parallela ai piani

$$2x + y + z = 0 \qquad e \qquad x + 2y + 3z = 0$$

passante per il punto $(1, 1, 1)$.

25. Determinare l'immagine di $f(x) = 1 - e^{-1/x^4}$

26. Studiare la convergenza di

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+n^3} \end{cases}$$

27. Calcolare una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$. Studiare l'integrabilità di f su $[2, +\infty[$.

28. Determinare il nucleo dell'applicazione $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$A(x, y, z) = (2x + z, 4x + y - 2z)$$

.

29. Determinare la parte reale ed immaginaria dell'inverso e del coniugato del numero complesso $i/(1+i)$.

30. Studiare la risolubilità del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinandone tutte le soluzioni.

31. Determinare una retta perpendicolare alla retta

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

e parallela al piano

$$2x + y + z = 0$$

Stabilire se sia unica, e indicare una condizione geometrica sotto la quale il problema ha più di una soluzione.

32. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = \bar{z}$

33. Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione definita su \mathbb{R}^3 dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

34. Quante soluzioni reali ha l'equazione $x = \cos x$?

35. Calcolare $\int_0^1 \lg \sqrt{1+x} dx$.

36. Determinare tutte le soluzioni di $\ddot{x} + \dot{x} = t$ (programma 2002/2003)

37. Determinare tutte le soluzioni complesse di $z + \bar{z} = z\bar{z}$

38. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la risolubilità di

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + z = -2 \\ 2x + \lambda y = 2 + \lambda \\ 3x + 2y + 3z = \lambda \end{cases}$$

39. Scrivere l'equazione della retta per l'origine perpendicolare al piano generato dai vettori $(1, 1, 1)$ e $(0, 2, 1)$.

40. Determinare tutte le primitive di

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin^2 x + 1)}$$

41. Studiare la convergenza di

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n \end{cases}$$

42. Studiare l'immagine della funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{x^2 - 1} \quad x \in \operatorname{dom}(f) \cap \{x \leq 0\}$$

