Risoluzione della prova scritta di Analisi Matematica II (Ing. Elettronica) del 30/5/2004

1. Determinare tutte le primitive di

$$\frac{1}{t^3 - 2\,t^2}$$

Risoluzione: Si determinano innanzitutto A,B,C tali che

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-2} \;=\; \frac{1}{t^3 - 2\,t^2}$$

Si può eseguire la somma a primo membro ed uguagliare i coefficienti corrispondenti, risolvendo il sistema lineare così ottenuto, oppure si può moltiplicare per t^2 e fare $t \to 0$, ottenendo $B = -\frac{1}{2}$; moltiplicando per $t-2$ e facendo $t \to 2$ si ottiene $C = \frac{3}{4}$. Infine, dalla relazione precedente, sostituendo i valori trovati per B e C, si ottiene

$$\frac{A}{t} \;=\; \frac{\frac{1}{2}(t-2) \,-\, \frac{3}{4}\,t^2 \,+\, t \,+\, 1}{t^3 \,-\, 2\,t^2} \;=\; \frac{\frac{3}{2} \,-\, \frac{3}{4}\,t}{t^2 \,-\, 2\,t}$$

Moltiplicando ambo i membri per t e facendo $t \to 0$ si ottiene infine $A = -\frac{3}{4}$. Una primitiva della funzione data è dunque

$$-\frac{3}{4}\,\lg\,|t| \,+\, \frac{1}{2\,t} \,+\, \frac{3}{4}\,\lg\,|t-2|$$

mentre tutte le altre possono essere trovate sommando ad essa una qualunque funzione con derivata identicamente nulla sul dominio della funzione integranda, ossia una funzione del tipo

$$\begin{cases} c_1 & t < 0 \\ c_2 & 0 < t < 1 \\ c_3 & t > 2 \end{cases}$$

dove c_1, c_2, c_3 sono costanti arbitrarie.

2. Determinare tutte le soluzioni di

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} = t$$

Risoluzione: Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ ha radici semplici 0 e -2. Lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è $<\,1\,,e^{-2t}\,>$. Il secondo membro è del tipo $p(t)e^{\lambda\, t}$, con $p(t) = t$ di primo grado e $\lambda = 0$, che risulta risonante con molteplicità 1. Una soluzione del problema completo avrà dunque la forma del tipo

$$t\,(at + b)\, e^{0\,t} \;=\; at^2 \;+\; bt$$

che, sostituita nell'equazione, dà

$$\dot{x} \;=\; 2\,a\,t \;+ b \qquad\qquad \ddot{x} \;=\; 2\,a$$

da cui, sostituendo nell'equazione, segue $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{1}{4}$. In definitiva l'insieme di tutte le soluzioni sarà costituito dalle funzioni

$$x(t) \;= a \;+\; b\, e^{-2t} \;+ \frac{1}{4}\, t^2 \;-\; \frac{1}{4}\, t$$

ove a e b sono costanti complesse arbitrarie.

3. Studiare la convergenza di

$$\sum_1^{\infty} \frac{2\,n}{n^2+1}\, x^n$$

Risoluzione: dal criterio del rapporto, essendo il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ rapporto di polinomi dello stesso grado, con lo stesso coefficiente dei termini di ordine massimo, segue che il raggio di convergenza è 1. Ne segue che la serie converge assolutamente almeno in $]-1, 1[$
Per $x = 1$, la serie diventa $\sum_1^{\infty} \frac{2\,n}{n^2+1}$, che è divergente perché a termini positivi e confrontabile con la serie armonica: infatti il limite del rapporto

$$\frac{\frac{2\,n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}$$

per $n \to \infty$ vale 2.
Per $x = -1$, la serie è a segni alterni, e la successione $\frac{2\,n}{n^2+1}$ è decrescente: riguardando n come variabile reale e derivando si ottiene

$$\frac{2(n^2 + 1 - 4n^2}{(n^2+1)^2}$$

che è negativa per ogni n intero. Dal teorema di Leibnitz segue la convergenza semplice in $x = -1$. La serie dei moduli coincide con quella data in $x = 1$ e diverge.
In sintesi, la convergenza è semplice in $[-1, 1[$, assoluta in $]-1, 1[$, uniforme in ogni intervallo $[-1, k]$ con $k < 1$, e totale in ogni intervallo $[-k, k]$, con $k < 1$.

4. Studiare l'integrabilita' di e^{-t^2} su $\mathbb{R}$.

Risoluzione: la funzione è pari, e dunque basta studiare il problema su $[0, +\infty[$. Inoltre è continua e positiva su $\mathbb{R}$, infinitesima all'infinito, e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{t^2}{e^{t^2}} = 0$$

come si vede con l'applicazione del teorema di Bernoulli (de l'Hospital). Ne segue che l'infinitesimo (all'infinito) dato è di ordine superiore a quello della funzione integrabile $1/t^2$ e dunque è definitivamente maggiorato da esso: per il teorema del confronto, è esso stesso integrabile e assolutamente integrabile, perché positivo.