Risoluzione della prova scritta di Analisi Matematica II (Ing. Elettronica) del 21/6/2004

1. Studiare la convergenza semplice e uniforme sul dominio comune di

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$$

Risoluzione: Si osserva subito che $f_n(0) = 0$. Per $x^* \neq 0$, invece si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x^*) = 1/x^*$$

Ne segue che $f_n \to g$, where $g(0) = 0$ e $g(x) = 1/x$ per $x \neq 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, il limite semplice è discontinuo in 0, mentre i termini della successione sono continui: il teorema sul limite uniforme di funzioni continue escude che la convergenza sia uniforme su ogni intervallo contenente l'origine.

2. Determinare tutte le primitive di $1/[(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}]$.

Risoluzione: L'integranda è definita in $[-1,0[\cup]0,1]$. Cambiando variabile ponendo $y = \arcsin x$ l'integranda diventa $1/y$. Una primitiva sara dunque $\log|\arcsin x|$. Tutte le altre si ottengono da essa aggiungendovi una funzione con derivata nulla nel dominio, e cioè del tipo

$$\phi(x) = \begin{cases} c & if\ x \in [-1,0[\\ d & if\ x \in]0,1] \end{cases}$$

3. Sviluppare

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{3\pi}t & se \quad x \in [0, \frac{3}{4}\pi] \\ 4 - \frac{4}{\pi}t & se \quad x \in [\frac{3}{4}\pi\ , \pi] \end{cases}$$

in serie trigonometrica rispetto alla base ortogonale $\sin kt$ su $[0,\pi]$.

Risoluzione: una primitiva di $\sin kt$ è $-\frac{coskt}{k}$ mentre una primitiva di $t \sin kt$ è, mediante integrazione per parti, $-t\frac{\cos kt}{k} + \frac{\sin kt}{k^2}$. Gli integrali si possono calcolare decomponendoli sui due intervalli $[0, \frac{3}{4}\pi]$ e $[\frac{3}{4}\pi\ , \pi]$

4. Studiare l'integrabilità di $\frac{\sin t}{(\log^2 x)\sqrt{t^2+1}}$ su $[2, +\infty[$.

Risoluzione: il modulo della funzione data è maggiorato da $\frac{1}{(\log^2 x)\sqrt{t^2+1}}$. Mettendo in evidenza t^2 dentro la radice e portando fuori $|t| = t\ su[2, +\infty[$ si osserva che la funzione maggiorante è confrontabile con $\frac{1}{t \log^2 t}$, e dunque è integrabile. Ne segue che la funzione data è assolutamente integrabile e quindi integrabile.

5. Determinare tutte le soluzioni di

$$\ddot{x} + \dot{x} = t + 1$$

Risoluzione: Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda = 0$ ed ha radici $0, -1$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea hanno la forma

$$x = a\ + b\, e^{-t}$$

Il secondo membro è della forma $p(t)\, e^{\lambda t}$, con $p(t) = t$ di primo grado, e $\lambda = 0$, risonante con molteplicità 1.
Ne segue che una soluzione dell'equazione completa ha la forma

$$x = t(ct + d)e^{0t} = ct^2 + d\, t$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\dot{x} = 2ct + d \qquad \ddot{x} = 2c \qquad 2c + 2ct + d = t + 1$$

da cui $c = 1/2$ e $d = 0$.
Ogni soluzione dell'equazione data ha dunque la forma $a\ + b\, e^{-t}\ + \frac{1}{2}t^2$