Prova scritta di Matematica (Ing. Informatica) del 24/6/2004

1. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z\overline{z} + 2\overline{z} = 1 + i$.

Risoluzione: ponendo $z = a + ib$ e sostituendo l'equazione diventa

$$a^2 + b^2 + 2a - 2ib = 1 + i$$

Uguagliando le parti reali e immaginarie si ottiene $a^2 + b^2 + 2a = 1$ e $-2b = 1$. Dalla seconda equazione si ricava $b = -1/2$. Sostituendo nella prima si ricava $a^2 + 2a = 1 - 1/4 = 3/4$ e cioè $4a^2 + 8a - 3 = 0$ che ha le due soluzioni $1/2\,,3/2$. Le soluzioni complesse sono dunque $\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$.

2. Studiare, usando l'eliminazione di Gauss, la risolubilità di

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

Risoluzione: la matrice completa è

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

sostituendo alla terza riga la sua somma con la prima, diventa

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

sostituendo alla terza la sua differenza con la seconda

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

da cui segue che la terza colonna dipende dalle prime due e il sistema è quindi risolubile.

3. Si considerino i vettori in $\mathbb{R}^4$

$$u = (1, 0, 2, 3) \qquad\qquad v = (0, 1, 0, 1)$$

Stabilire la proiezione di u nella direzione di v, e scrivere la retta per u nella direzione di v.

Risoluzione: il vettore proiezione è il multiplo di v di lunghezza pari al modulo di u per il coseno dell'angolo fra i due vettori, e cioè

$$w = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|^2} v$$

Nel caso in esame:

$$u \cdot v = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$
$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$\|v\| = \sqrt{2}$$
$$w = \frac{3}{2\sqrt{14}}(0, 1, 0, 1)$$

La retta per u nella direzione di v ha equazione x=u+tv e cioè

$$\begin{aligned} &x = 1 \\ &y = t \\ &z = 2 \\ &w = 3 + t \end{aligned}$$

4. Determinare tutte le primitive di

$$\frac{2 - t^3}{t^3 - t}$$

Risoluzione: poiché il grado del denominatore è uguale a quello del denominatore per prima cosa si deve eseguire la divisione con resto.

$$2 - t^3 = -1(t^3 - t) - t + 2$$

da cui la funzione integranda vale

$$-1 - \frac{t - 2}{t^3 - t}$$

per determinarne una primitiva si osservi che il denominatore ha tre zeri semplici per t=0 , t=1 , t=-1. Basta dunque determinare A , B , C tali che

$$\frac{t - 2}{t^3 - t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t + 1}$$

Oltre al metodo generale, che fa uso del principio d'identità dei polinomi per scrivere un sistema in A,B,C, si può fare prima moltiplicando ambo i membri per t e fare $t \to 0$, ottenendo A=2; poi moltiplicare per $t-1$ e fare $t \to 1$ ottenendo $B = -1/2$; infine moltiplicare per $t+1$ e fare $t \to -1$, ottenendo $C = -3/2$.
Ne segue che una primitiva è

$$-t - (2\lg|t| - \frac{1}{2}\lg|t-1| - \frac{3}{2}\lg|t+1|)$$

Tutte le altre possono essere ottenute sommando ad essa una qualunque funzione che assuma valori costanti, eventualmente diversi, sugli intervalli $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, e $]1, +\infty[$, dai quali è composto il dominio della funzione integranda.

2. Studiare l'integrabilità di $f(t) = t^2 - \lg(e^{t^2} - 1)$ su $[1, +\infty[$.

Risoluzione: mettendo in evidenza e^{t^2} dentro le parentesi e usando la proprietà dei logaritmi la funzione diventa $t^2 - t^2 - \lg(1 - e^{-t^2}) = -\lg(1 - e^{-t^2})$.
Poiché l'argomento del logaritmo è minore di 1 la funzione integranda è positiva. Dal limite notevole del logaritmo segue che ha lo stesso ordine d'infinitesimo di $-e^{-t^2}$, che è di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di $1/x$, come per esempio $1/x^2$. Dunque f è integrabile.

3. Determinare l'immagine di $f(t) = \arctan(\frac{x}{|x|}e^{-x})$.

Risoluzione: f è definita per $x \neq 0$ e vale $\arctan(e^{-x})$ per $x > 0$ mentre vale $-\arctan(e^{-x})$ per $x < 0$.
Nel primo caso è composizione di una funzione crescente con una decrescente ed è quindi decrescente. Nel secondo, invece, f è crescente in quanto composizione di funzioni decrescenti. Dunque, per il teorema sulle funzioni monotone, segue

$$\sup_{x>0} f = \lim_{x\to 0} f = \arctan 1 = \pi/4$$

e

$$\inf_{x>0} f = \lim_{x\to +\infty} f = \arctan 0 = 0$$

e ancora

$$\sup_{x<0} f = \lim_{x\to 0} f = \arctan -1 = -\pi/4$$

e

$$\inf_{x<0} f = \lim_{x\to -\infty} f = -\pi/2$$

Tutte le monotonie sono strette e dunque gli estremi non sono assunti, da cui $Imf =]-\pi/2, -\pi/4[\cup]0, \pi/4[$