1) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ha sistema caratteristico

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice (polinomio caratteristico) è

$$(\lambda^2-1)(4-\lambda) - 4 - 4 - \left(-4 - \cancel{4\lambda} - 4 + \cancel{4\lambda} - 4 + \lambda\right) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 - 8 + 12 - \lambda = -\lambda^2(\lambda - 4)$$

che ha radice $\lambda = 0$ doppia e $\lambda = 4$ semplice

La dimensione dell'autospazio di $\lambda = 0$ è il numero delle variabili non pivot del sistema caratteristico per $\lambda = 0$, ecco è

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array} \iff \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

che ha due incognite non pivot (u_2 e u_3)

Dunque la matrice è diagonalizzabile perché la dimensione dell'autospazio dell'autovalore doppio è 2

2) Proiezione di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ su $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Si può adoperare la formula, VALIDA SOLO IN $\mathbb{R}^3$,

$$X_{\langle u,v \rangle} = X - X_{u \times v}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$ che è parallelo a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2(-1)}{1^2+0^2+(-1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}}$$

<u>ALTRO METODO</u> (valido in ogni spazio euclideo)

Si scrive la proiezione $W = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e si impone che

$$X - W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left[\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1-2\alpha \\ 1+\alpha+3\beta \\ 2-2\alpha \end{pmatrix}$$

sia ortogonale ai generatori dello span $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

cioè

$$\begin{cases} 2-4\alpha-1-\alpha-3\beta+4-4\alpha=0 \\ -3(1+\alpha+3\beta)=0 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{cases} 5-9\alpha-3\beta=0 \\ 1+\alpha+3\beta=0 \end{cases}$$

sommando si ottiene

$$6-8\alpha=0 \qquad \alpha=\frac{3}{4}$$

e sostituendo nella seconda

$$\beta=-\frac{7}{12}$$

Infine

$$W=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

La dimensione di $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

è il numero di pivot del sistema

$$\begin{array}{lcccc}
1^a & 1 & 2 & 0 & 3 \\
2^a & -1 & 0 & -2 & -1 \\
3^a & 1 & 1 & 1 & 2 \\
2^a + 1^a \to 2^a & 0 & 2 & -2 & 2 \\
\text{div. } 2 \quad 2^a & 0 & 1 & -1 & 1 \\
3^a - 1^a \to 3^a & 0 & -1 & 1 & -1 \\
3^a + 2^a \to 3^a & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

2 pivot

La dimensione è 2

Si può calcolare il rango della matrice, calcolando TUTTI i determinanti dei 4 minori 3X3 estratti e verificando che sono nulli e mostrando un esempio di determinante di un minore 2X2 NON NULLO.

4) $\sin x$ e $\cos x$ sono indipendenti perché esistono punti nei quali uno si annulla e l'altro no, e dunque non possono essere l'uno multiplo dell'altro.

Per determinare la matrice associata si considera

$A(\sin x) = -\sin x - \cos x$

$A(\cos x) = -\cos x + \sin x$

La I colonna della matrice è formata dal coeff. ($=-1$) del coseno e da quello ($=-1$) del seno

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

SOGLIA PER L'AMMISSIONE

$\boxed{3}$

IL PROCEDIMENTO DEVE ESSERE CHIARAMENTE INDICATO SUL FOGLIO CONSEGNATO E CONDURRE ALLE RISPOSTE CORRETTE.