ALGEBRA 1

1) VETTORE IN $\mathbb{R}^n$

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1..n$$

$x_1, x_2 .. x_n$ sono dette componenti (o, più raramente, coordinate) di x.

Esempi: $(\pi) \in \mathbb{R}^1$, $(1, e^2/2) \in \mathbb{R}^2$, $(-1, 3, 0, \frac{\pi}{4}) \in \mathbb{R}^4$

2) VETTORE NULLO 0 IN $\mathbb{R}^n$

$$0 \equiv (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ componenti nulle}})$$

Esempi: $(0,0)$ è il vettore nullo in $\mathbb{R}^2$; $(0,0,0,0,0)$ è il vettore nullo in $\mathbb{R}^5$.

3) UGUAGLIANZA DI VETTORI IN $\mathbb{R}^n$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x = y \iff x_i = y_i \quad \forall i = 1..n$$

Due vettori in $\mathbb{R}^n$ sono uguali se tutte le componenti di uguale indice sono uguali (e, in particolare, se il numero n delle componenti è uguale).

4) VETTORE OPPOSTO $-x$ DI $x \in \mathbb{R}^n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si pone

$$-x \equiv (-x_1, -x_2, .., -x_n)$$

Esempio: $-(1,2,3) \equiv (-1,-2,-3)$

5) SOMMA $x+y$ DI VETTORI x E y DI $\mathbb{R}^n$.

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ si pone

$$x+y \equiv (x_1+y_1, x_2+y_2, .., x_n+y_n)$$

Si possono sommare solo vettori dello stesso spazio (uguale numero di componenti)

Esempio: $(1,2,-1)+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{4}, -1+\frac{1}{3}\right) =$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{2}{3}\right)$$

6) MULTIPLO SCALARE λx DI UN VETTORE ovvero PRODOTTO DI UNO SCALARE λ PER UN VETTORE x

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \lambda x \equiv x\lambda \equiv (\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n)$

Esempi: $2(1,\pi) = (2\cdot 1, 2\cdot\pi) = (2, 2\pi)$

$$\frac{1}{2}(2,3,4) = \left(\frac{1}{2}\cdot 2, \frac{1}{2}\cdot 3, \frac{1}{2}\cdot 4\right) = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$$

7) NORMA ovvero MODULO ovvero LUNGHEZZA $|x|$ DI UN VETTORE x DI $\mathbb{R}^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ si pone $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$

Esempi: $|(1,2,3)| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$|(-2,3)| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$

8) PRODOTTO SCALARE xy DI VETTORI x E y IN $\mathbb{R}^n$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ si definisce $xy \in \mathbb{R}$ (scalare), ponendo

$$xy \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Esempi: $(-1,2,-4)(-2,1,1) = (-1)(-2) + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 =$

$= 2 + 2 - 4 = 0$

$(1,2)(3,-1) = 1 \cdot 3 + 2(-1) = 3 - 2 = 1$

Nota: il prodotto scalare NON gode della legge di annullamento del prodotto: il primo esempio mostra che esistono vettori non nulli, $(-1,2,-4)$ e $(-2,1,1)$, il prodotto dei quali è nullo.

9) ORTOGONALITA' IN $\mathbb{R}^n$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, x e y si dicono ortogonali se e solo se $xy = 0$.

Talvolta, si scrive anche $x \perp y$

Esempi:

- 0 è ortogonale a qualunque vettore

$$(0,0,0,0)\cdot(\pi, e, \sqrt{2}, \operatorname{arctg} 2) =$$
$$= 0\cdot\pi + 0\cdot e + 0\cdot\sqrt{2} + 0\cdot \operatorname{arctg} 2 = 0$$

- Per ogni $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $(-b,a)\perp(a,b)$, perché

$$(-b,a)(a,b) = (-b)a + ab = -ba + ab = 0$$

- I vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ sono a due a due ortogonali: $(0,1,0)(0,0,1) = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

PROPRIETA' E CONSEGUENZE

A) $x+y \equiv (x_1+y_1, x_2+y_2, .., x_n+y_n) =$ (poiché $x_i+y_i = y_i+x_i \ \forall i$)

$$= (y_1+x_1, y_2+x_2, .., y_n+x_n) \equiv y+x \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

Dunque: **LA SOMMA E' COMMUTATIVA**

B) $(x+y)+z = ((x+y)_1+z_1, (x+y)_2+z_2, .., (x+y)_n+z_n) =$

$$= ((x_1+y_1)+z_1, .., (x_n+y_n)+z_n) =$$
$$= (x_1+(y_1+z_1), .., x_n+(y_n+z_n)) = x+(y+z)$$

Dunque: **LA SOMMA E' ASSOCIATIVA**

C) $0+x = (0,0,..,0)+(x_1,x_2,..,x_n) = (0+x_1, 0+x_2, .., 0+x_n) =$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$$

Dunque: LO ZERO E' NEUTRO RISPETTO ALLA SOMMA

D) $x + (-x) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \dots, x_n + (-x_n)) = (0, 0, \dots, 0)$

Dunque: L'OPPOSTO $-x$ E' L'ELEMENTO OPPOSTO DI x RISPETTO ALLA SOMMA.

E) $1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x$

F) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda (x + y) = (\lambda (x+y)_1, \lambda (x+y)_2, \dots, \lambda (x+y)_n) =$$

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) =$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) =$$

$$= \lambda x + \lambda y$$

Dunque: IL PRODOTTO PER UNO SCALARE E' DISTRIBUTIVO SULLA SOMMA DI VETTORI

Analogamente si prova che:

$$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$$

Dunque: <u>IL PRODOTTO PER UN VETTORE E' DISTRIBUTIVO SULLA SOMMA DI SCALARI</u>.

<u>Nota</u>: le due proprietà distributive, assieme, asseriscono che si può "mettere in evidenza" sia uno scalare comune sia un vettore comune in una somma di prodotti.

G) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(\mu x) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu x_2, \dots, \lambda\mu x_n) =$$
$$= (\lambda\mu)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda\mu) x$$

Nota: NON è propriamente una proprietà associativa, anche se è formalmente identica. Prestare attenzione a quali termini siano scalari e quali vettori.

Un insieme sul quale sia definita un'operazione verificante B) C) e D) si chiama un <u>GRUPPO</u>; se vale anche A) si chiama <u>GRUPPO ABELIANO</u>, in onore del grande matematico norvegese Niels Abel.
Se, oltre all'operazione precedente (la somma), è definito anche un prodotto per uno scalare verificante E), F) e G) l'insieme si dirà <u>SPAZIO VETTORIALE</u> (<u>su</u> $\mathbb{R}$)

Le proprietà precedenti, provate per $\mathbb{R}^n$, sono gli **ASSIOMI** di spazio vettoriale, e cioè le proprietà costitutive che devono essere verificate perché gli oggetti di un insieme arbitrario si possano qualificare (e studiare) come "VETTORI".

Altre proprietà interessanti, che potrebbero essere provate a partire dagli assiomi, sono le seguenti, immediate in $\mathbb{R}^n$.

H) $0x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad 0x = (0x_1, 0x_2, .., 0x_n) = (0,0,..,0)$

$\lambda 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda 0 = (\lambda 0, \lambda 0, .., \lambda 0) = (0,0,..,0)$

I) $\lambda x = 0 \iff \lambda = 0$ oppure $x = 0$

Infatti $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n)$ e dunque $\lambda x = 0$ se e solo se $\lambda x_1 = \lambda x_2 = .. = \lambda x_n = 0$ e dunque o $\lambda = 0$ oppure debbono annullarsi $x_1, x_2, .., x_n$, e dunque $x = 0$.

Dunque: **IL PRODOTTO SCALARE PER VETTORE VERIFICA LA LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO**, diversamente da quanto osservato per il prodotto scalare.

ASSIOMI E PROPRIETA' DELLA NORMA

1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Infatti, $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \sum_1^n x_i^2 \geq 0$ e quindi la radice (sempre positiva o nulla, se definita) è definita.

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $|x| = 0 \Leftarrow x = 0$, perché $x = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, .., 0)$ da cui $|x| = \sqrt{0^2 + 0^2 + .. + 0^2} = 0$

- $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, perché $|x| = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_1^n x_i^2} = 0 \Rightarrow$ $\sum_1^n x_i^2 = 0$ (unico zero della radice) $\Rightarrow x_j^2 = 0 \ \forall j = 1..n$ (perché $x_i^2 \geq 0 \ \forall i \in 1..n$, da cui $0 = \sum_1^n x_i^2 \geq x_j^2 \geq 0 \ \forall j = 1..n$ e dunque $x_j^2 = 0 \Rightarrow x_j = 0 \ \forall j = 1..n$, da cui $x = 0$.

3) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$

$$|\lambda x| = |(\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n)| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + .. + \lambda_n^2 x_n^2} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2} = |\lambda| \, |x|$$

Questa proprietà è detta **OMOGENEITA'**.

4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ **DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE**

La prova in $\mathbb{R}^n$ è delicata e verrà esposta più avanti.

Uno spazio vettoriale sul quale è definita una funzione $x \to |x|$ verificante 1) 2) 3) e 4) è detto <u>**NORMATO**</u>.

Le prime tre proprietà sono immediatamente verificate per $\mathbb{R}^n$.

La disuguaglianza triangolare è di verifica non banale anche per $\mathbb{R}^2$, mentre è ben nota in $\mathbb{R}^1$: $|x+y| = |x| + |y|$ se x e y sono reali concordi o se uno dei due (almeno) è nullo, mentre $|x+y| < |x| + |y|$ se x e y sono discordi (non nulli).

L'omogeneità consente di introdurre il concetto di versore.

5) Per ogni $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, si definisce il <u>**VERSORE DI** x</u> ponendo

$$\hat{x} = \frac{1}{|x|} x$$

Il versore $\hat{x}$ verifica la proprietà $|\hat{x}| = 1$, perché

$$|\hat{x}| = \Big|\underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\lambda} x\Big| = \Big|\underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\lambda}\Big|\,|x| = \frac{1}{|x|}|x| = 1$$

6) Anche se non è stato definito il quoziente di un vettore per uno scalare, così come in algebra elementare si pone

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

da cui il versore può essere scritto nel modo abbreviato

$$\hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

ASSIOMI E PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad xx \geq 0$

Infatti, $xx = \sum_1^n x_i^2 = |x|^2$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad xx = 0 \iff x = 0$

IL PRODOTTO SCALARE E' "DEFINITO POSITIVO"

Come prima, $xx = |x|^2$ e da questo per noto per la norma in $\mathbb{R}^n$ segue l'equivalente

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad xy = yx$

Infatti $xy \equiv \sum_1^n x_i y_i = \sum_1^n y_i x_i = yx$

Nonostante avrebbe senso dire che il prodotto scalare è COMMUTATIVO, per usare la terminologia delle forme quadratiche si dice che è **SIMMETRICO** (identico significato).

4) $\forall x, y, z, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$x(y+z) = xy + xz \quad$ (per la 3) $\quad (y+z)x = yx + zx$)

$(\lambda x) y = \lambda (xy) \quad$ (per la 3) $\quad x(\lambda y) = \lambda xy$)

Le due proprietà che, assieme, vengono dette di **BILINEARITA'**, si provano come prima, a partire dalle analoghe proprietà dei numeri reali applicati alle singole componenti. Uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare verificante 1), 2), 3), 4) viene detto

SPAZIO EUCLIDEO (REALE).

La proprietà di bilinearità consente di raccogliere un fattore comune in una somma di prodotti scalari. Dunque: **IL PRODOTTO SCALARE E' DISTRIBUTIVO RISPETTO ALLA SOMMA, RISPETTO AD ENTRAMBI I SUOI ARGOMENTI (TERMINI).**

5) Il prodotto scalare NON è ASSOCIATIVO.

CONTROESEMPIO: posto $u = (1,0)$ ed $v = (0,1)$

si ha $(uv)v = (1\cdot 0 + 0\cdot 1)(0,1) = 0(0,1) = (0,0)$

mentre

$$u(vv) = (1,0)(0\cdot 0 + 1\cdot 1) = (1,0)1 = (1,0)$$

e dunque i due risultati sono differenti.

E' possibile (e utile) estendere i concetti sviluppati in $\mathbb{R}^n$ ad altri oggetti matematici, e ciò spiega lo sforzo compiuto per selezionare un insieme minimo di proprietà, gli ASSIOMI indispensabili per poter poi ritrovare i risultati già provati in $\mathbb{R}^n$. Non sempre ciò è a costo zero: lo spazio euclideo complesso $\mathbb{C}^n$, formato dalle n-uple di numeri COMPLESSI, richiede un "aggiustamento" degli assiomi di prodotto scalare.

PROIEZIONE DI UN VETTORE

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, si definisce la **PROIEZIONE (ORTOGONALE)** x_y **DI** x **SU** y ponendo

$$x_y \equiv \frac{xy}{|y|^2}\, y$$

Talvolta si usa il simbolo $P_y(x)$ per indicare x_y.

PROPRIETÀ DELLA PROIEZIONE

1) $$\left.\begin{aligned} (x+y)_z &= x_z + y_z \\ (\lambda x)_y &= \lambda x_y \end{aligned}\right\}$$ LA PROIEZIONE È LINEARE

Infatti, $$(x+y)_z = \frac{(x+y)z}{|z|^2}\, z = \frac{xz + yz}{|z|^2}\, z =$$
$$= \left(\frac{xz}{|z|^2} + \frac{yz}{|z|^2}\right) z = \frac{xz}{|z|^2}\, z + \frac{yz}{|z|^2}\, z = x_z + y_z$$

Analogamente, sempre utilizzando la bilinearità del prodotto scalare, si prova che $(\lambda x)_y = \lambda x_y$

2) $(x_y)_y = x_y$ **LA PROIEZIONE È IDEMPOTENTE**

Infatti x_y è un multiplo di y ($\frac{xy}{|y|^2}$ è scalare) e dunque basta provare che $(\lambda y)_y = \lambda y$. Ciò è immediato perché

$$(\lambda y)_y = \frac{(\lambda y) y}{|y|^2} y = \lambda \underbrace{\frac{yy}{|y|^2}}_{=1} y = \lambda y$$

Le due proprietà 1) e 2) sono gli assiomi dei **PROIETTORI**, ma la proprietà caratteristica che giustifica il nome **ORTOGONALE** è

3) $(u - u_v) \perp v$ "**TEOREMA DELLA PROIEZIONE**"

Infatti $(u - u_v) v = \left(u - \frac{uv}{|v|^2} v\right) v = uv - \left(\frac{uv}{|v|^2} v\right) v =$

$$= uv - \frac{uv}{|v|^2}(vv) = uv - uv = 0$$

Più avanti verranno definite estensioni del concetto di proiezione ortogonale, ma le proprietà 1), 2) e 3) verranno sempre mantenute.

Esempio: sia $x = (1,1,2,-1)$ e $y = (1,1,1,1) \neq 0$. Si ha

$$x_y = (1,1,2,-1)_{(1,1,1,1)} = \frac{(1,1,2,-1)(1,1,1,1)}{|(1,1,1,1)|^2} (1,1,1,1) =$$

$$= \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} (1,1,1,1) = \frac{3}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

confermiamo, per esercizio, il teorema della proiezione. Infatti

$$x - x_y = (1,1,2,-1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}\right)$$

e inoltre

$$(x - x_y) y = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}\right)(1,1,1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{7}{4} = 0$$