2. PRODOTTO SCALARE E NORMA

Una fondamentale conseguenza, quasi immediata della definizione di prodotto scalare è il

1) **TEOREMA DI PITAGORA**: Se $x \perp y$ allora

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Infatti, $x \perp y$ vuol dire che $xy = 0$, da cui, per la simmetria,

$$|x+y|^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = xx + xy + yx + yy =$$
$$= |x|^2 + |y|^2$$

2) $x \perp y \Rightarrow \lambda x \perp \mu y \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (multipli di vettori ortogonali sono ortogonali)

Infatti $(\lambda x)(\mu y) = \lambda [x(\mu y)] = \lambda \mu (xy)$

che si annulla se $xy = 0$, e dunque se $x \perp y$.

3) $|x| \geq |x_y| \quad \forall y \neq 0$ (**FORMA GEOMETRICA DELLA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ**)

Essendo $|x|$ e $|x_y| \geq 0$ la disuguaglianza precedente è equivalente a $|x|^2 \geq |x_y|^2$. Per provarla, osserviamo che $x = x_y + (x - x_y)$, che x_y è un multiplo di y e che, per il teorema della proiezione, $(x - x_y) \perp y$ e dunque, per la 2), è ortogonale anche a x_y, che è un suo multiplo. Dal teorema di Pitagora, applicato a x_y e $(x - x_y)$ segue

$$|x|^2 = |x_y|^2 + \underbrace{|x - x_y|^2}_{\geq 0} \geq |x_y|^2$$

Osserviamo che $|x| = |x_y|^2$ se e solo se $|x - x_y|^2 = 0$ da cui $x - x_y = 0$ e cioè se $x = x_y$. Ciò accade se e solo se x è un multiplo di y.

4) DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ (originale)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |xy| \leq |x||y|$$

Se $y = 0$ ambo i membri sono 0, e la disuguaglianza è vera (vale l'uguaglianza).

Se $y \neq 0$, dalla disuguaglianza 3) segue

$$|x| \geq |x_y| \equiv \left| \frac{xy}{|y|^2} y \right| = \frac{|xy|}{|y|}$$

da cui, moltiplicando per $|y|$, segue immediatamente la tesi.

NOTA: nella disuguaglianza di Schwartz vale l'uguaglianza se e solo se x è un multiplo di y, in quanto solo in tale caso si ha $|x| = |x_y| = \frac{|xy|}{|y|}$

ALTRA DIMOSTRAZIONE: si ha

$$0 \leq |x - \lambda y|^2 = |x|^2 - 2\lambda xy + \lambda^2 |y|^2$$

Il trinomio (nell'indeterminata λ) avendo il coefficiente di λ^2 non negativo, è sempre ≥ 0 se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$ e cioè $(xy)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0$, da cui $(xy)^2 \leq |x|^2|y|^2$ e infine la tesi, passando alla radice. L'uguaglianza si verifica se $\frac{\Delta}{4} = 0$, e cioè se $|x - \lambda y|^2$ si annulla in un unico λ, da cui $x - \bar{\lambda} y = 0$.

e dunque x è multiplo di y.

5) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|x+y| \leq |x|+|y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti, essendo ambo i membri maggiori o uguali a 0, occorre e basta provare che

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

e cioè, essendo

$$(x+y)(x+y) = |x|^2 + 2xy + |y|^2,$$

occorre e basta provare che

$$|x|^2 + 2xy + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

che equivale a

$$xy \leq |x||y|$$

Ciò segue immediatamente dalla disuguaglianza di Schwartz, in quanto

$$xy \leq |xy| \leq |x||y|$$

<u>NOTA</u>: nella disuguaglianza triangolare <u>NON</u> vale l'uguaglianza <u>se</u> e <u>solo se</u> x è multiplo di y. Infatti

$$0 = |x-x| \leq |x| + |-x| = 2|x|$$

e la disuguaglianza vale strettamente se $x \neq 0$. Se però $xy > 0$, allora $xy = |xy|$ e la proprietà precedente è vera, in quanto la disuguaglianza triangolare equivale a quella di Schwartz.

Dunque: $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy=|x||y| \Leftrightarrow$ o x o y sono nulli oppure $|x||y|>0$ e dunque $xy>0$, da cui $xy=|xy|=|x||y| \Rightarrow \exists\lambda: x=\lambda y$ da cui infine $0<xy=(\lambda y)y=\lambda|y|^2$ da cui $\lambda>0$.

6) IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2\left(|x|^2+|y|^2\right)$$

Infatti:

$$(x+y)(x+y)+(x-y)(x-y)=|x|^2+|y|^2+2xy+|x|^2+|y|^2-2xy=$$
$$=2\left(|x|^2+|y|^2\right)$$

7) IL PRODOTTO SCALARE ESPRESSO IN FUNZIONE DELLA NORMA

$$xy=\frac{1}{4}\left(|x+y|^2-|x-y|^2\right)$$

Infatti, sviluppando il secondo membro, si ottiene

$$\frac{1}{4}\left(|x|^2+|y|^2+2xy-|x|^2-|y|^2+2xy\right)=xy$$

8) DEFINIZIONE DI $\cos\widehat{xy}$

Si definisce il coseno formato da due vettori x e y ponendo

$$\boxed{\cos\widehat{xy}\equiv\frac{xy}{|x||y|}}$$

Dalla disuguaglianza di Schwartz risulta subito $|\cos\widehat{xy}|\leq 1$ ed è $|\cos\widehat{xy}|=1$ se e solo se $|xy|=|x||y|$ e cioè se x è multiplo di y con entrambi non nulli.

NOTA: Con la definizione precedente, risulta

$$xy=|x||y|\cos\widehat{xy}$$

che coincide con la definizione usata in Fisica.

9) TEOREMA DI CARNOT

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2xy =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\hat{xy}$$

3. LA DISTANZA. GLI SPAZI METRICI

Per ogni coppia di vettori x e y in $\mathbb{R}^n$, o in un qualunque spazio normato, si definisce la **DISTANZA** (detta anche **METRICA**) $d(x,y)$, ponendo

$$d(x,y) = |x-y|$$

Così definita, la distanza verifica le quattro proprietà seguenti (**ASSIOMI**), ed un insieme arbitrario, non necessariamente dotato della struttura di spazio vettoriale o normato, ma dotato di una distanza che le verifichi viene detto **SPAZIO METRICO**.

1) $d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Negli spazi normati, come $\mathbb{R}^n$, tali proprietà seguono da quelle analoghe della norma:

$d(x,y) = |x-y| \geq 0$ perché la norma è non negativa

$0 = d(x,y) = |x-y|$ si verifica se e solo se $x-y=0$.

3) $$d(x,y) = d(y,x)$$

Negli spazi normati, essa deriva dall'omogeneità della norma. Infatti:

$$d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |-1|\,|y-x| = |y-x| = d(y,x)$$

4) $$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

<u>DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE</u> (originale, di Euclide; in un triangolo un lato non supera la somma degli altri due)

Negli spazi normati, essa discende direttamente da quella analoga per la norma. Infatti

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq$$

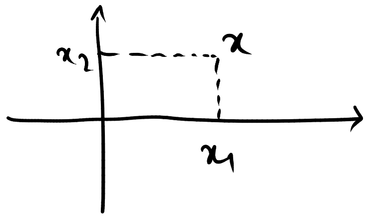
$$\leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$

Esistono spazi metrici non dotati di norma. In tal caso l'utente dovrà definirvi una distanza e verificare per essa gli assiomi 1), 2), 3), e 4). Gli elementi di uno spazio metrico (che non sia anche uno spazio vettoriale) vengono, di regola, chiamati <u>punti</u>, riservando il nome di <u>vettori</u> a quelli di uno spazio vettoriale (normato o meno).

4) LA GEOMETRIA IN $\mathbb{R}^n$

La possibilità di associare ai vettori un oggetto geometrico è limitata solo ai casi $n=1,2,3$, ove la visualizzazione è possibile (e utile). Il caso $n=2$ offre il miglior compromesso fra semplicità ed espressività per esporre la teoria.

Scelto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (monometriche) si può identificare ogni punto del piano x con il sistema (x_1, x_2) delle sue coordinate



$$x \equiv (x_1, x_2)$$

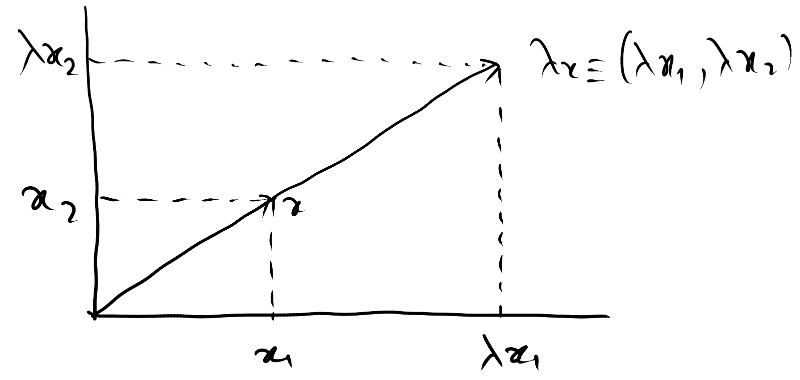
La definizione tradizionale di vettore, impiegata sistematicamente in Meccanica ma anche in tutta la Fisica, è quella di <u>segmento orientato</u>. Il legame fra i due concetti si stabilisce identificando il punto $x=(x_1, x_2)$ con il segmento Ox, orientato dall'origine verso x.

Identificheremo con $x=(x_1, x_2)$ lo spostamento dall'origine al punto estremo, che è sempre x.

Si ha subito, dal teorema di Pitagora (originale), che la <u>lunghezza</u> del segmento Ox è $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ e cioè

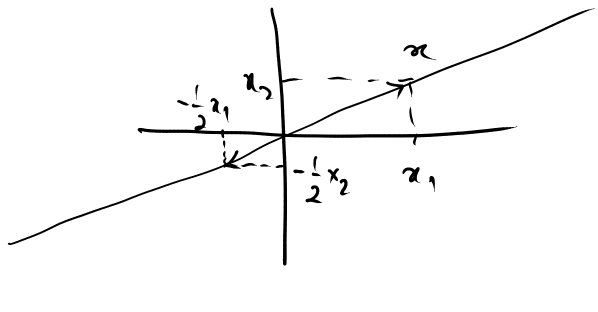
$$\overline{Ox} = |x|$$

1) MULTIPLO SCALARE DI UN VETTORE



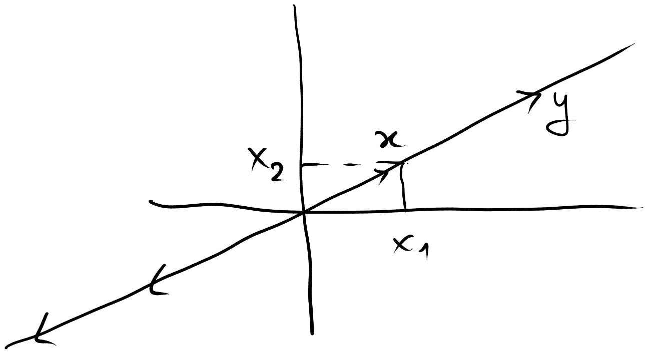
Dal teorema di Talete, applicato ad esempio alle rette verticali tagliate dalle trasversali costituite dall'asse x_1 e dalla retta che prolunga x, segue che il segmento λx è lungo esattamente $|\lambda|$ volte il segmento x, perché rispetta lo stesso rapporto che c'è fra x_1 e λx_1. Ne segue che $2x$ è lungo 2 volte x e sta sulla stessa retta.

Se si considerano i multipli <u>negativi</u>, la retta di appartenenza sarà sempre la stessa, ma il vettore si troverà dalla parte opposta dell'origine



$-\frac{1}{2}x$ ha la stessa direzione, lunghezza dimezzata e verso opposto.

La più importante conseguenza delle osservazioni precedenti è che i vettori consentono di scrivere in modo semplice e nuovo l'equazione delle rette passanti per l'origine

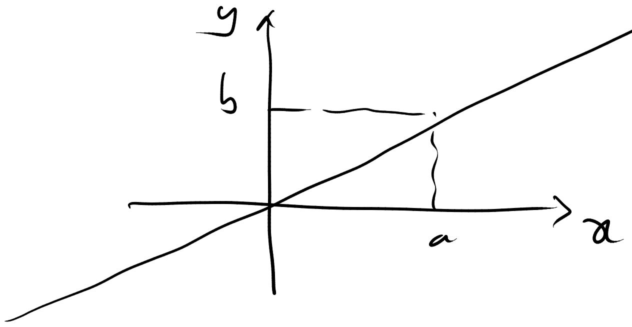


Ogni punto y della retta corrisponderà ad un multiplo del vettore x che può essere calcolato (sempre in forza del teorema di Talete) considerando il rapporto λ fra $|y|$ e $|x|$ e scegliendo il segno positivo se x e y hanno lo stesso verso e quello negativo altrimenti.

Una retta per l'origine, passante per il punto x, diventa l'insieme

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \right\}$$

Ciò conduce alla cosiddetta forma <u>**PARAMETRICA**</u> dell'equazione della retta, che con le notazione classica diventa

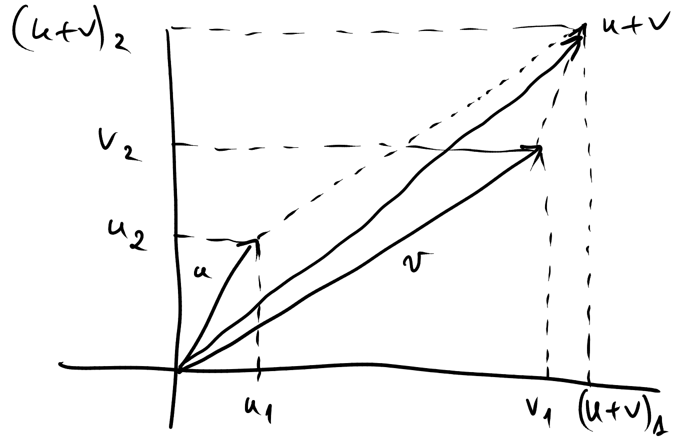


$$\begin{cases} x(t) = ta \\ y(t) = tb \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

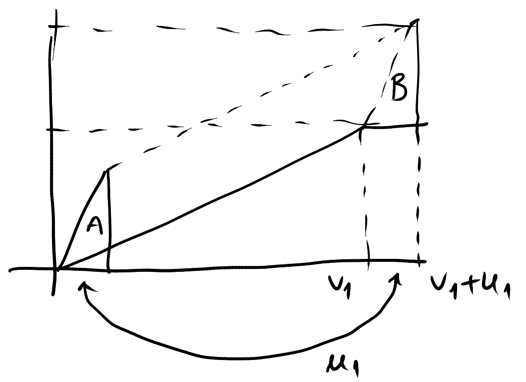
E' utile pensare alla forma parametrica come ad un <u>MOTO</u>, ove t è il tempo e $x(t)$ e $y(t)$ sono le coordinate del punto in movimento all'istante t. Poiché la distanza percorsa è proporzionale a t, il moto è uniforme, oltre che rettilineo.

2) SOMMA DI VETTORI E REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

Sommiamo due segmenti orientati aventi origine comune con la regola del parallelogramma, e determiniamo le coordinate della somma.



I lati opposti del parallelogramma sono uguali.



i triangoli rettangoli A e B sono uguali e dunque il cateto orizzontale e verticale di B valgono esattamente u_1 e u_2, da cui

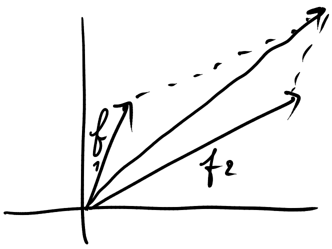
$$(u+v)_1 = v_1 + u_1 \qquad (u+v)_2 = v_2 + u_2$$

In definitiva, le componenti dello spostamento corrispondente alla diagonale sono (u_1+v_1, u_2+v_2), in accordo con la definizione di somma di vettori di $\mathbb{R}^n$.

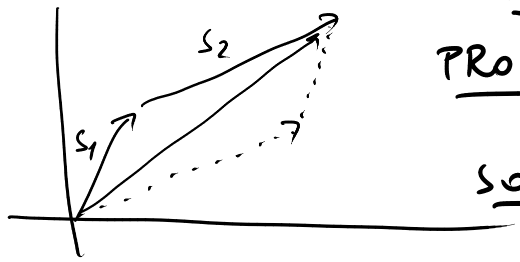
Naturalmente, è piuttosto complesso spiegare ad un calcolatore come impiegare la regola del parallelogramma per sommare due frecce che partono da un punto comune, mentre è è banale spiegargli come eseguire due (o in generale, n) somme di coordinate.

In Fisica, la somma di vettori, intesi come segmenti orientati, ha interpretazioni diverse, già nella Meccanica: quando si sommano *forze* si pensa a due corde fissate in un unico punto e tirate da due persone in due diverse direzioni, mentre sommare due *spostamenti* è completamente diverso, in quanto si pensa ad un uomo che si sposta prima nella direzione, nel verso e per la distanza del primo vettore e poi, dal punto raggiunto, esegue un nuovo spostamento in accordo col secondo vettore.

SOMME DI:



FORZE

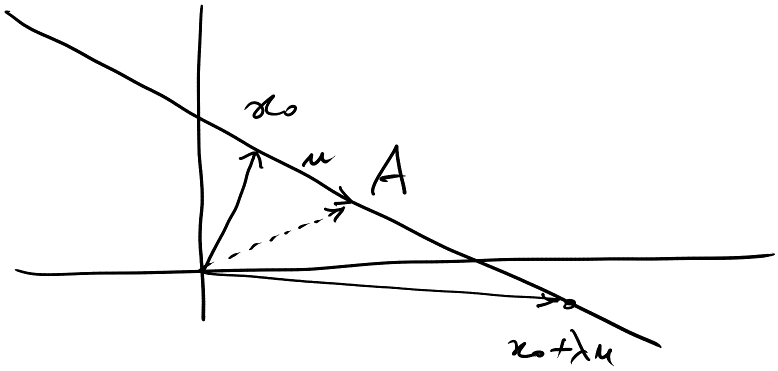


SPOSTAMENTI

STESSA PROCEDURA DI SOMMA

In questo ordine d'idee, ogni volta che si intende interpretare un vettore come uno spostamento, occorre ricordare che le sue componenti esprimono nelle somme non tanto coordinate assolute, ma incrementi (offset, per gli anglofili) rispetto al punto nel quale ci si trova. Queste idee conducono al concetto di SPAZIO AFFINE, che esula dall'ambito di queste note, ma vale la pena di illustrare subito una applicazione interessante: l'equazione parametrica di una retta non passante per l'origine.

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA



Ricordando che un vettore in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$) è identificato con il punto di arrivo dello spostamento dall'origine, basta osservare che per andare dall'origine ad un qualunque punto della retta occorre effettuare due spostamenti in sequenza (e cioè la loro somma); uno per andare dall'origine ad un qualunque punto della retta (in figura x_0) ed un altro lungo la retta. Detto u lo spostamento dal punto x_0 al punto A, si vede che ogni spostamento da x_0 ad un altro punto della retta è un multiplo di u (stessa direzione) e dunque il punto $x_0 + tu$ descriverà, al variare di t in $\mathbb{R}$, tutti i punti della retta.

L'equazione parametrica vettoriale corrispondente è

$$x(t) = x_0 + tu$$

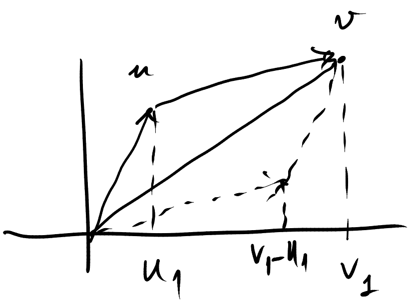
mentre quella scalare (chiamando x_1 e x_2 le coordinate del punto mobile e a e b quelle di x_0) diventa

$$\begin{cases} x_1(t) = a + tu_1 \\ x_2(t) = b + tu_2 \end{cases}$$

RETTA PARAMETRICA IN $\mathbb{R}^2$

La legge precedente, se t è il tempo, è quella del moto rettilineo uniforme di un punto che passa per x_0 per $t=0$ e viaggia in direzione di u (che è la <u>velocità</u> del punto) nel piano.

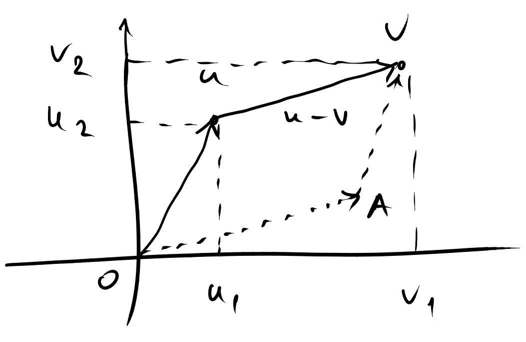
<u>REGOLA DEL TRIANGOLO</u>



La differenza fra gli spostamenti v e u è corrispondente al vettore $v-u$ (lati opposti del parallelogramma).

Graficamente, la differenza fra due vettori si ottiene completando il triangolo. Algebricamente, considerando il vettore differenza, che ha per componenti le differenze delle componenti (identificato al lato opposto del parallelogramma avente v per diagonale e u come uno dei lati).

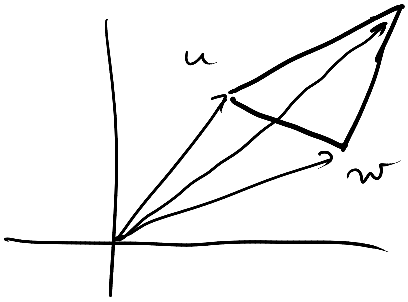
<u>DISTANZA FRA DUE PUNTI</u>



$$\boxed{d(u,v) = |u-v|} = \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2}$$

Utilizzando la definizione geometrica di vettore, la distanza è la lunghezza dello spostamento differenza $\overrightarrow{uv}$. La definizione $|u-v|$, invece, esprime la lunghezza di $\overrightarrow{OA}$. Esse coincidono, perché lati opposti di un parallelogramma.

Si vede bene che un vettore "algebrico" di $\mathbb{R}^n$ esprime in modo non sempre immediato i vettori geometrici. Non è una tragedia: anche i vettori geometrici esprimono forze, spostamenti e rotazioni, concetti profondamente differenti, con somme da interpretare in modi altrettanto differenti, e per nulla immediati. Ad esempio, si può interpretare così



la disuguaglianza triangolare "algebrica"

$$|u-v| \leq |u-w| + |w-v|$$

che esprime esattamente la proprietà euclidea dei triangoli, perché le norme scritte sono le lunghezze dei lati del triangolo in grassetto.

LA RETTA PARAMETRICA IN $\mathbb{R}^n$

Per ogni coppia di vettori $x_0, u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ si definirà **retta** (parametrica) **per** x_0 **in direzione** di u, la funzione di $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = x_0 + tu \qquad t \in \mathbb{R}$$

NOTA: se $u = 0$ la funzione precedente è costante in t perché $tu = t0 = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, e non rappresenta più una retta, ma il punto x_0. Il vettore u verrà anche detto **VELOCITÀ**!