FACOLTA D'INGEGNERIA DELL'UNIVERSITA` DI PISA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Programma dettagliato del corso di

ANALISI MATEMATICA II E ALGEBRA LINEARE

(Prof. Placido Longo)

(I bozza)

Il programma seguente e` derivato direttamente dal registro delle lezioni del corso, eliminandone gli argomenti ripetuti e, in qualche caso, cambiandoli di posto. Gli studenti sono invitati a segnalarne incongruenze o punti poco chiari al docente, per consentirgli di modificarlo.
Per tutti gli argomenti contrassegnati con uno (*) o due (**) asterischi, siano essi singoli teoremi o interi capitoli (integrazione in piu` variabili), e` richiesta la conoscenza degli enunciati, ma non delle dimostrazioni. E` facolta` del candidato esporre una (qualunque) dimostrazione per incrementare il suo punteggio. Ignorare le sole DIMOSTRAZIONI relative agli argomenti contrassegnati con due asterischi (**) non pregiudichera` in alcun modo il punteggio finale. Gli argomenti contrassegnati con tre asterischi (***) sono facoltativi per quanto attiene alla conoscenza sia degli enunciati, sia delle dimostrazioni.

ALGEBRA LINEARE

1._ LO SPAZIO EUCLIDEO Rn.

Lo spazio Rn, componenti, eguaglianza, somma, prodotto per uno scalare e loro significato geometrico nel piano. Proprieta` assiomatiche di spazio vettoriale, provate in Rn.
Norma, sue proprieta` assiomatiche e versori in Rn. Formulazione vettoriale dell'equazione di Newton della gravitazione universale. Distanza e assiomi in Rn.
Coseno dell'angolo fra versori e vettori in R2 ed R3. Prodotto scalare, ortogonalita` e coseno dell'angolo in Rn. Proprieta` assiomatiche del prodotto scalare in Rn e contresempio per la proprieta` associativa. Un prodotto scalare sullo spazio delle funzioni continue su [0,1].
Prodotto scalare e norma. Teorema di Pitagora e identita` del parallelogramma. La formula uv=1/4[|u+v|^2-|u-v|^2]. Proiezione di un vettore nella direzione di un altro. Ortogonalita` del resto e decomposizione ortogonale. Teorema della proiezione: proprieta` di minima distanza.
Area di parallelogrammi (e triangoli): espressione tramite norme e prodotto scalare dei lati e tramite somma dei quadrati dei minori 2x2, in R2 e Rn. Complessita` di calcolo per le due formule.
Prodotto vettore. Ortogonalita` coi fattori. Modulo del prodotto vettore e area. Bilinearita` e antisimmetria. Volume del parallelepipedo di spigoli dati e prodotto misto. Il modulo del prodotto vettore e suo orientamento.

L'equivalenza fra la disuguaglianza triangolare e quella di Schwartz. Dimostrazione in R2 ed R3 usando le proprieta` del coseno. Altra dimostrazione mediante la relazione fra lunghezza del vettore e lunghezza delle sue proiezioni. Altra dimostrazione dedotta dalle formule dell'area. La dimostrazione classica. Il caso dell'uguaglianza.

2._ LA GEOMETRIA IN Rn.

Curve parametriche e traiettorie. Equazione parametrica delle rette per l'origine, e per un punto generico.
Rette e semirette per due punti. Segmenti, punto medio, e *poligoni piani. Conversioni fra le forme algebrica e parametrica.
Vettore normale ad una retta per l'origine in forma implicita. Retta per un punto, normale ad un vettore dato. Condizioni di parallelismo e perpendicolarita` per rette parametriche e algebriche.
Equazioni algebriche della retta nello spazio. Equazione normale del piano nello spazio.

Intersezione e sistemi di equazioni lineari. Intersezione di rette parametriche (intersezione delle traiettorie e collisioni).
Posizione reciproca di rette nello spazio: rette incidenti, parallele, sghembe.

Parallelismo di rette con vettori velocita` allineati.
Introduzione alle superficie parametriche ed equazione parametrica del piano.

Confronto fra metodo algebrico e parametrico e possibile approccio "ibrido" nei seguenti problemi: intersezione di due piani; determinare la retta per un punto perpendicolare ad un dato piano; equazione della bisettrice di un angolo dato; punto simmetrico ad uno dato rispetto ad una retta; piano per un punto e una retta data.

Fascio di piani per una retta assegnata.

3._ MATRICI

Matrici, tipo, righe, colonne, trasposta, somma, multiplo, zero, opposto e differenza.
Matrici quadrate, identiche, diagonali, triangolari, simmetriche, antisimmetriche, ortogonali.
Vettori riga e vettori colonna.

Prodotto di matrici per vettori. Prodotto di matrici, e loro tipo. Convenzione di Einstein.
Struttura del prodotto, decomponendo il primo fattore in righe o il secondo in colonne.
Prodotto di una matrice per i vettori della base canonica. Proprieta` fondamentale della matrice identica.
Rappresentazione vettoriale e matriciale dei sistemi di equazioni lineari.
Trasposta di un prodotto. Proprieta` associativa, distributiva. Contresempio alla proprieta` commutativa.
*L'algebra delle matrici quadrate: polinomi di matrici.

Inversa destra e sinistra. Unicita` dell'inversa (se esistono entrambe).
La matrice nulla non e` invertibile.
Inversa di diagonali e ortogonali.

Prodotti scalari e trasposizione: matrici simmetriche.

4._ SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Risolubilita` e risoluzione per sostituzione all'indietro di sistemi triangolari.
Matrici a scala e risolubilita` dei sistemi lineari associati.
Condizioni di compatibilita` sul secondo membro per sistemi sovradeterminati (piu` equazioni che incognite), e criteri di scelta dei pivot e delle incognite libere (parametri) per i sistemi con incognite sovrabbondanti.

Trasformazione di sistemi generici in sistemi a scala. Permutazione di righe e colonne e algoritmo di eliminazione di Gauss.
Scelta del pivot e annullamento dei coefficienti seguenti della colonna per addizione e sottrazione.
Algoritmo di Gauss-Jordan di riduzione alla matrice identica con pivot tutti non nulli. Risoluzione simultanea di problemi con termini noti diversi e calcolo della matrice inversa di una matrice quadrata.

Sistemi omogenei: condizioni per l'esistenza di soluzioni non nulle.
Il complemento ortogonale e i sistemi omogenei.

5._ SPAZI VETTORIALI ASTRATTI

Spazi vettoriali astratti: i polinomi e le funzioni continue in un intervallo.
*Spazio delle applicazioni lineari fra due spazi vettoriali e algebra delle applicazioni lineari da uno spazio in se` (cenni).
*Spazio duale e base duale di una base data.

Combinazioni lineari e span. Dipendenza lineare: definizione e condizione caratteristica.

Sottospazi. Quali rette costituiscono un sottospazio di R2? Il sottospazio somma e intersezione.
*Somma diretta: condizione sull'intersezione perche' la somma sia diretta; somma diretta di spazi ortogonali.
Il complemento ortogonale e` un sottospazio; lo span di un insieme di vettori e` un sottospazio.
Sistemi di generatori e spazi di dimensione finita e infinita: Rn e i polinomi.

Dipendenza e indipendenza lineare: le potenze sono indipendenti; indipendenza di sistemi di vettori "diagonali", "triangolari" e ortogonali.

Definizione di base. In un sistema di generatori puo` essere eliminato un vettore dipendente dagli altri.
Basi come sistemi minimi di generatori. Se una base ha n elementi, qualunque insieme di m>n vettori e` dipendente.

Teorema della base: 1) ogni spazio di dimensione finita ammette una base; 2) Tutte le basi hanno lo stesso numero d'elementi.
Coordinate rispetto ad una base: unicita`.
La dimensione: definizione.
Teorema del completamento. Se dim(X)=n, ogni insieme di n vettori indipendenti e` una base.

Dimensione di Rn e dei polinomi di grado <=n. Decomposizione in fratti semplici di un rapporto di polinomi: posizione del problema nei termini dell'algebra lineare. Indipendenza dei fratti semplici e risolubilita` del problema nel caso di radici reali semplici o multiple.

I teoremi classici sui sistemi lineari: condizione di esistenza di Rouche' e Capelli mediante il rango delle matrici completa e incompleta; teorema di esistenza e unicita` di Cramer sui sistemi quadrati; condizione generale di unicita` mediante l'indipendenza delle colonne.

Determinazione per riduzione a scala di: dimensione di uno span, indipendenza o dipendenza di un sistema di vettori. completamento a base di un sistema di vettori indipendenti; riduzione a base di un sistema di generatori dipendenti.

6._ APPLICAZIONI LINEARI

Applicazioni lineari: definizione ed esempi (integrale su C0[0,1]).

Nucleo e immagine sono sottospazi. Condizione caratteristica di iniettivita` sul nucleo.
Equazioni lineari astratte: soluzione particolare, nucleo (soluzioni dell'omogenea) e struttura generale delle soluzioni.

*Teorema di Grassmann sulla dimensione del nucleo e dell'immagine.

*Se X e` somma diretta di Y e Z allora dim(X)=dim(Y)+dim(Z).
La dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare e` non maggiore della dimensione del dominio.

L'inversa di un'applicazione lineare e` lineare. Applicazioni lineari e valori su una base.
Isomorfismo canonico fra gli spazi di dimensione n e Rn, e fra di loro.
Struttura delle applicazioni lineari fra R e R, R e Rn, Rn e R, Rn e Rm, n,m > 1 : rappresentazione come prodotto.
Isomorfismo canonico e matrice associata ad un'applicazione lineare e a due basi.
*Matrice associata alla funzione composta di due applicazioni lineari.
Immagine di un'applicazione lineare e` lo span delle colonne della matrice associata.

L'eliminazione di Gauss per: il calcolo del rango, del nucleo e della sua dimensione. iniettivita`, suriettivita`, biiettivita` e verifica se un insieme di n vettori formi o meno una base in Rn.

7._ DETERMINANTI

Le tre proprieta` caratteristiche del determinante: valore sulla matrice identica, alternanza, multilinearita`. Colonne uguali o dipendenti.
Condizione necessaria e *sufficiente per la dipendenza lineare e` il determinante nullo.
*L'indipendenza lineare di vettori per estrazioni di minori a determinante non nullo.
L'aggiunta ad una colonna di una combinazione delle altre. La formula risolutiva di Cramer per i sistemi lineari quadrati.

**Permutazioni e numero di inversioni. **Definizione di determinante: complessita` di calcolo.
Calcolo di determinanti di matrici 2x2, 3x3, diagonali e triangolari.
**Il determinante della matrice trasposta. Proprieta` del determinante rispetto alle righe.

*Calcolo efficiente del determinante per riduzione a forma triangolare.
Esistenza dell'inversa sinistra di una matrice, nota quella destra.
**Teorema di Binet sul determinante del prodotto, e determinante dell'inversa.
**Regola di Laplace di sviluppo secondo gli elementi di una riga o di una colonna.
*Formula della matrice inversa con i cofattori: valutazione della complessita` di calcolo.
**Volume del parallelepipedo.

8._ AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Autovalori ed autovettori di un'applicazione lineare da uno spazio in se`; autospazi.
Indipendenza e intersezioni di autospazi di autovalori distinti.

Autovettori e autovettori di matrici:equazione e polinomio caratteristici. Regola dei segni di Cartesio generalizzata: condizione necessaria e sufficiente perche' un polinomio a radici tutte reali abbia soluzioni tutte positive o tutte negative.
Esempio di matrice priva di autovalori reali. Esistenza di autovalori complessi, mediante il teorema di Gauss.

9._ SPAZI EUCLIDEI COMPLESSI

Spazi vettoriali complessi. Struttura euclidea complessa: prodotti hermitiani.
*La disuguaglianza di Schwartz negli spazi euclidei complessi. Basi ortonormali.
**Esistenza e completamento di basi ortonormali: **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Sviluppo di Fourier rispetto ad una base ortonormale. Lo sviluppo di Fourier e l'elemento di minima distanza.

10._ DIAGONALIZZABILITA`

Applicazioni lineari da uno spazio in se` e cambio di base: matrici associate alla stessa applicazione rispetto a basi diverse.
La matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto ad una base di suoi autovettori e` diagonale, e viceversa.

Una classe di matrici diagonalizzabili: matrici nxn con n autovalori reali distinti.
Esempio di matrice non diagonalizzabile.
Esistenza di matrici non simmetriche con basi di autovettori non ortonormali.

11._ DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI SIMMETRICHE

Tutti gli autovalori di una matrice simmetrica reale sono reali.
Ogni matrice simmetrica reale ha un autovettore reale.
Gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.
Se un vettore w e` ortogonale ad un autovettore di A anche Aw lo e`.
Teorema spettrale: Per ogni matrice simmetrica reale esiste una base di suoi autovettori (base spettrale).

ANALISI MATEMATICA II

1._ FUNZIONI DI PIU` VARIABILI

Topologia di Rn: sfere e intervalli; insiemi limitati; punti interni, di frontiera, esterni, di accumulazione, isolati; funzioni continue e funzioni convergenti. Insiemi chiusi e aperti. Successioni convergenti.
Estensione dei teoremi dell'analisi in una variabile reale ai vettori: il caso del limite della somma di successioni convergenti. Teoremi di permanenza del segno.
*Approssimazione di punti d'accumulazione con punti dell'insieme.
Gli insiemi chiusi contengono i limiti delle successioni convergenti di propri punti.
Disuguaglianze fra la norma e i moduli delle componenti. La convergenza in Rn equivale alla convergenza delle componenti.
Convergenza e continuita` nei numeri complessi.
Limiti all'infinito.
Funzioni e successioni divergenti.
Funzioni a valori vettoriali: rappresentazione, convergenza e continuita` delle componenti.
Richiamo degli enunciati principali della teoria dei limiti e delle funzioni continue.
*Condizione di Cauchy per la convergenza di successioni e funzioni.
Funzioni omogenee definite su un cono. Limite nell'origine di funzioni omogenee:
le funzioni omogenee di grado zero non costanti non convergono.
Le funzioni omogenee di grado strettamente positivo limitate sull'insieme dei versori appartenenti al loro dominio sono infinitesime.
Esempio di funzione omogenea di grado strettamente positivo non infinitesima.
Esempio di funzione con limiti nulli su tutte le rette per l'origine, ma non infinitesima.

2._ TEOREMI FONDAMENTALI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Connessione (per archi): definizione e teorema degli zeri in piu` variabili.
Completezza di spazi metrici, normati, euclidei. *Esempio di spazio metrico non completo:]0,1].
*Completezza di Rn.
**Il teorema di Bolzano-Weierstrass.
*Compattezza: da ogni successione limitata se ne puo` estrarre una convergente.
Successione massimizzante di una funzione reale.
Teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo. Controesempi per il teorema di Weierstrass.

Continuita` della norma.
Esempi di polinomi in due variabili non divergenti all'infinito.
I polinomi complessi divergono all'infinito.
Le funzioni continue reali su Rn, divergenti positivamente all'infinito hanno minimo assoluto.
*Il teorema fondamentale dell'algebra (di Gauss): ogni polinomio complesso ha zeri complessi.
Fattorizzazione di un polinomio complesso in fattori di primo grado.

3._ DERIVABILITA` E DIFFERENZIABILITA` IN PIU` VARIABILI

Derivate direzionali e derivate parziali. Esempi di calcolo di derivate direzionali e parziali usando la definizione. Regole pratiche di derivazione parziale.
Condizione di Fermat sui punti di massimo o minimo interni.
Esempio di funzione discontinua con tutte le derivate direzionali nulle.
Il differenziale e il piano tangente al grafico.
Le funzioni differenziabili sono continue.
Le funzioni differenziabili hanno derivate in ogni direzione.
Formula di rappresentazione del differenziale mediante le derivate parziali: il gradiente.
Differenziabilita` di funzioni lineari: il caso delle proiezioni sugli assi.
Formula classica del differenziale.
*Teorema di differenziabilita` delle funzioni con derivate parziali continue.

Stima del modulo della derivata direzionale: il gradiente e la direzione di massima pendenza.
Vettori normali ad un grafico di funzione.
**Differenziale di funzioni composte .
Rappresentazione dei differenziali per funzioni da R a R, da R a Rn, da Rn a Rm: velocita` e jacobiano.
Derivata di una funzione composta da una da R in Rn e una da Rn a R.
Equazione delle curve di livello e perpendicolarita` al gradiente.
Derivate successive e **teorema di Schwarz. Matrice hessiana.
*Formula di Taylor in piu` variabili (resto di Lagrange). *Il resto n-esimo di Lagrange e` infinitesimo di ordine n rispetto alla distanza dal punto iniziale.
Condizioni sufficienti per un estremo locale sui massimi e sui minimi della forma hessiana sulla sfera unitaria. Punti di sella in caso di estremi discordi. Il caso indeterminato: forma hessiana con un estremo nullo.
*La condizione di Fermat applicata agli estremi della forma hessiana sulla sfera unitaria mediante il suo prolungamento omogeneo di grado 0 a tutto il complementare dell'origine, H(w)/|w|^2: ruolo degli autovalori e autovettori della matrice hessiana.

Discussione dei punti critici: hessiana definita (autovalori non nulli e concordi), indefinita (una coppia di autovalori non nulli e` discorde), semidefinita (almeno un autovalore nullo con gli autovalori non nulli concordi): rilevanza dei termini di ordine superiore.
Il segno degli autovalori in pratica: regola dei segni di Cartesio.

4._ INTEGRABILITA` DI CAMPI DI VETTORI E FORME DIFFERENZIALI

Il problema della primitiva in piu` variabili: campi di vettori e integrabilita`.
Condizione necessaria di integrabilita` sulle derivate parziali delle componenti del campo (Condizione del rotore) per campi di classe C1.
Integrabilita` di forme differenziali lineari: forme chiuse ed esatte (integrabili).
Equivalenza fra le due formulazioni del problema dell'integrabilita`.
L'integrale curvilineo di un campo o di una forma.
Invarianza rispetto al cammino dell'integrale di campi (o forme) integrabili: differenza di potenziale.
Esempio di campo irrotazionale non integrabile.
Accodamento di curve: additivita` dell'integrale curvilineo rispetto a curve accodate.
Condizione necessaria e *sufficiente per l'integrabilita` di campi continui: l'indipendenza dal cammino e l'integrale sulle curve chiuse.
Deformazione (omotopia) di curve.
**Teorema di invarianza per deformazione dell'integrale di campi irrotazionali (o forme chiuse).
Integrabilita` di campi irrotazionali su aperti semplicemente connessi. Insiemi stellati.
Funzioni con gradiente identicamente nullo e forma generale dei potenziali di un campo su un aperto.
Calcolo di un potenziale di un campo, mediante il calcolo dell'integrale curvilineo su un cammino conveniente, accertata l'integrabilita`.
Metodo alternativo: integrazione diretta del sistema di equazioni differenziali del gradiente, con verifica che il dominio del potenziale coincida con quello del campo.
***Esame del comportamento del "differenziale d'angolo" -(y/x^2+y^2)dx+(x/x^2+y^2)dy.
***Studio (sommario) del caso dei campi irrotazionali con un numero finito di singolarita`: riduzione per deformazione ad un numero finito di cicli attorno alle singolarita`.

5._ CURVE PARAMETRICHE

Curve regolari e generalmente regolari. Curve semplici e chiuse. Immagine o sostegno.
***Il teorema di Jordan sul complementare di una curva regolare semplice e chiusa.
Esempio di curva C1 la cui immagine e` un grafico di funzione non regolare.
Rettificabilita` e lunghezza. ***Cenni al controesempio di Peano.
*Integrale di funzioni vettoriali (secondo Mengoli-Cauchy). *Stima della norma dell'integrale con l'integrale della norma.
Rettificabilita` delle curve C1. **Formula per il calcolo della lunghezza.
Lunghezza di un grafico di funzione. Parametrizzazioni equivalenti: invarianza della lunghezza.
Ascissa curvilinea.
Integrale curvilineo e **formula per il calcolo.
Coordinate polari piane: formule di conversione. Curve in coordinate polari: formula per la lunghezza. Curve di tipo r=f(theta). Equazione polare della circonferenza unitaria centrata in (1,0). La

spirale di Archimede r=theta e la curva r=sin(theta): lunghezze.
Coordinate polari cilindriche: formule di conversione e lunghezza. Elica.
Coordinate polari sferiche: formule di conversione. **Calcolo della lunghezza di una curva in coordinate sferiche.

6._ FUNZIONI IMPLICITE

Equazioni differenziali a variabili separabili: risoluzione per riduzione del problema alla risoluzione di un'equazione implicita. Luoghi di zeri di funzioni di due variabili: Il problema della rappresentazione mediante grafici di funzioni: funzioni esplicite.
***Enunciato del teorema di esistenza ed unicita` della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine.
Teorema di U. Dini sulle funzioni implicite: esistenza e *continuita` di una funzione esplicita u=f(t) che verifica identicamente in un intervallo l'equazione G(t,f(t))=0.
Il caso di una funzione G di classe C1: *espressione della derivata della funzione esplicita.
Curve di livello critiche e non critiche.
**Enunciato della versione vettoriale (sistemi di funzioni implicite): condizione dello jacobiano.
**Il teorema di invertibilita` locale.
Curve parametriche regolari piane: rappresentabilta` locale come grafici di funzioni regolari.

7._ **INTRODUZIONE ALL'INTEGRAZIONE IN PIU` VARIABILI

Introduzione all'integrazione secondo Lebesgue: dalla partizione del dominio a quella del codominio.
Misurabilita` di intervalli, plurintervalli, aperti, compatti; misura esterna e interna di un insieme limitato arbitrario, misurabilita` e misura di Lebesgue; insiemi non limitati;
Operazioni insiemistiche sui misurabili.
Proprieta` della misura: numerabile additivita`, monotonia, subadditivita`, finita additivita`, continuita` verso l'alto e verso il basso).
***Numerazione di Cantor dei razionali e verifica per numerabile subadditivita` che hanno misura nulla.

Integrale di Lebesgue di una funzione.
Funzioni misurabili e loro proprieta`.
Integrabilita` di una funzione misurabile e limitata su un insieme di misura finita.
Definizione alternativa di integrale di Lebesgue: funzioni semplici misurabili.
La funzione di Dirichlet e` integrabile su ogni insieme di misura finita e l'integrale vale 0.
Integrabilita` di funzioni non limitate su insiemi di misura infinita: parte positiva e negativa, Integrabilita` del modulo.
Integrale di Riemann e di Lebesgue, relazioni e teorema di Lebesgue-Vitali. Integrale di Lebesgue e assoluta integrabilita` di Riemann.
Teoremi di Beppo Levi e di Lebesgue di passaggio al limite sotto il segno d'integrale.
Teoremi di Fubini e Tonelli sugli integrali iterati. Domini normali.
Formule di cambio di variabile: jacobiano.
Formule di Gauss-Green sugli integrali doppi di una derivata parziale.

L'area di una regione piana come un integrale curvilineo sul suo bordo.

8._ SUPERFICIE PARAMETRICHE

Superficie parametriche regolari, piano tangente e vettore normale: *vettori tengenti alle curve interamente giacenti sulla superficie.
**Area di una (porzione di) superficie regolare. **Regolarita` delle coordinate polari sferiche sulla superficie di una sfera centrata nell'origine. **Area della sfera.
**Integrale superficiale di una funzione esteso ad una superficie regolare. Area di una superficie cartesiana (grafico di una funzione di due variabili).