PROGRAMMA DEL CORSO DI ALGEBRA LINEARE E ANALISI MATEMATICA II A.A. 2009-2010

ALGEBRA LINEARE.

L'algebra in $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto cartesiano. Definizione degli insiemi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$: somma, multiplo scalare, zero, opposto. Proprietà caratteristiche (assiomi): proprietà commutativa della somma, associativa di somma e prodotto, distributiva del prodotto sulla somma di scalari e vettori, prodotto per lo scalare 1. Altre proprietà (prodotto per 0 e annullamento del prodotto). Legame fra le proprietà caratteristiche e algebra delle equazioni vettoriali. Combinazioni lineari, insieme di generatori e insieme generato (span). La base canonica: genera tutto lo spazio e nessun suo sottinsieme lo fa. Sistemi lineari di m equazioni in n incognite: scrittura in forma di equazione vettoriale. Il prodotto scalare e la norma: definizione. Il prodotto scalare e verifica delle proprietà caratteristiche: bilinearità, simmetria, essere definito positivo. La norma e le sue proprietà caratteristiche con verifica (tranne la disuguaglianza triangolare). Altre proprietà non verificate: associatività e annullamento del prodotto. Versore di un vettore non nullo. Teorema di Pitagora. Identità del parallelogramma. Espressione del prodotto scalare in funzione della norma. Coseno dell'angolo. Proiezione di un vettore su uno non nullo. Ortogonalità del resto. Relazione fra le norme di un vettore e delle sue proiezioni; il caso dell'uguaglianza. Dimostrazione delle disuguaglianze di Schwartz e triangolare. Distanza euclidea e sue proprietà caratteristiche. Le proprietà della distanza euclidea a partire da quelle della norma. Area del parallelogramma definito da due vettori, in funzione di norme e prodotto scalare e a partire dalle componenti. Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ e le sue proprietà: ortogonalità con i fattori, determinazione del modulo e del verso (regole della mano destra e della vite), bilinearità e antisimmetria. Lo spazio euclideo complesso $\mathbb{C}^n$: generalità. Discussione e definizione di prodotto emisimmetrico o hermitiano: proprietà del prodotto scalare complesso.

La geometria in $\mathbb{R}^n$.

Equazioni parametriche di rette, semirette, segmenti. Retta per un punto in una direzione. Conversione da equazione implicita a parametrica e viceversa. Intersezione di rette: modello cinematico e discussione delle differenze fra intersezioni di orbite e collisioni. Cenni alle curve parametriche. Condizione di parallelismo. Analisi del significato vettoriale dell'equazione implicita della retta nel piano: perpendicolarità degli spostamenti al vettore dei coefficienti. Retta per un punto perpendicolare ad un piano in forma implicita. Equazione della retta in forma implicita come intersezione di piani e determinazione del suo vettore direzione attraverso il prodotto vettore dei vettori normali ai rispettivi piani. Bisettrice di un angolo dato in forma parametrica: confronto col metodo classico. Rette nel piano: conversione da forma implicita a forma parametrica e viceversa. Retta per due punti. Piano parametrico per tre punti. Eliminazione dei parametri e conversione da forma implicita a parametrica. Vettore normale al piano parametrico e conversione da forma parametrica a forma implicita senza eliminazione per i piani nello spazio. Punto di minima distanza di una retta da un punto dato. Forma normale dell'equazione di rette e piani. Intersezione di rette parametriche nel piano: rette coincidenti, parallele, incidenti. Intersezione di rette parametriche e piani in forma normale nello spazio: rette incidenti, parallele e giacenti su un piano. Intersezione di rette parametriche nello spazio: rette coincidenti, parallele, incidenti, sghembe. Proiezione di punti su rette e piani in forma normale. Proiezione su una retta in forma parametrica. Applicazione del metodo vettoriale allo studio dell'intersezione di rette nel piano e nello spazio; intersezione di rette con piani; proiezione di punti su rette e piani impliciti e parametrici; rette sghembe e retta di minima distanza; distanza di un punto da una retta o un piano. Definizione di insieme convesso e di cono. Combinazioni convesse e combinazioni coniche: l'insieme delle combinazioni convesse e l'insieme delle combinazioni coniche sono convessi. Proprietà di cono dell'insieme delle combinazioni coniche. Rappresentazione implicita di semispazi mediante soluzioni di disequazioni di primo grado. Introduzione allo studio dei poliedri: discussione del caso di tre rette e delle regioni convesse definite dalle intersezioni dei vari semispazi ad esse relativi; tali regioni sono somma di combinazioni convesse e coniche dei vertici.

L'algoritmo di Gauss per i sistemi di equazioni lineari.

Risoluzione dei sistemi lineari. Sistemi elementarmente risolubili: diagonali, triangolari, a scala. Operazioni elementari su un sistema ed effetti sulle soluzioni: permutazione delle righe, delle colonne, somma ad una riga di un multiplo non nullo di un'altra. L'algoritmo di Gauss di eliminazione o riduzione a scala. Elementi pivot: criteri di scelta. Esempi di sistemi quadrati a soluzione unica. Esempi di sistemi con incognite in eccesso: scelta dei pivot ed espressione delle soluzioni in funzione dei valori delle incognite non pivot. Esempi di sistemi sovradeterminati privi di soluzioni: riduzione a scala con equazioni impossibili. Risoluzione di sistemi lineari mediante l'algoritmo di Gauss di riduzione a scala, per sistemi quadrati e rettangolari, con più equazioni che incognite o viceversa. Algoritmo di risoluzione di Gauss-Jordan. Risoluzione simultanea di sistemi con più termini noti. Applicazioni geometriche: spazio ortogonale ad un sistema di vettori; intersezione di rette in $\mathbb{R}^3$; appartenenza o no di un vettore allo span di un numero finito di altri. Definizione astratta di sistema a scala.

Matrici.

Matrici reali e complesse. Somma e multiplo scalare. Vettori riga e colonna. Prodotto di matrici e tipo del prodotto. Elemento (i,j) del prodotto come prodotto scalare della riga i del primo fattore per la colonna j del secondo. Non commutatività del prodotto: esempio di due matrici (2,2) che non commutano. Prodotto matrice per vettore, e forma matriciale dei sistemi di equazioni lineari. Prodotto di una matrice per i vettori della base canonica. Prodotto di matrici a blocchi; il caso del primo fattore decomposto in una colonna di righe e del secondo decomposto in una riga di colonne. Il prodotto scalare di vettori riga e colonna. Matrice trasposta (in $\mathbb{R}^n$) e aggiunta (in $\mathbb{C}^n$). Proprietà fondamentale di aggiunte e trasposte riguardanti i prodotti scalari. Matrici simmetriche e autoaggiunte. Aggiunta di un prodotto. Proprietà distributiva e associativa del prodotto. Matrice identica e sue proprietà caratteristiche. Invertibilità (regolarità) e matrici singolari: inversa destra e sinistra di una matrice quadrata regolare. Risoluzione di sistemi lineari quadrati mediante la matrice inversa. Esempi di matrici non nulle che non posseggono inversa. Inversa di un prodotto. L'insieme delle matrici quadrate di un dato ordine è chiuso per somma, multiplo scalare e prodotto: l'algebra non commutativa delle matrici quadrate. Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo dell'inversa di una matrice. Esempi nei casi singolari e regolari. Inverse di matrici diagonali e triangolari. Prodotto di una matrice per matrici con un unico elemento uguale ad 1 e gli altri nulli: estrazione e spostamento di singole righe e colonne.

Spazi vettoriali.

Definizione. Lo spazio dei polinomi, delle funzioni limitate, continue, derivabili, integrabili. Esempi in negativo: funzioni positive, crescenti, convesse. Sottospazi: intersezione, somma e somma diretta di sottospazi. Condizione sull'intersezione necessaria e sufficiente perché una somma sia diretta. Lo span di un numero finito di vettori è un sottospazio. Lo span non cambia se si aggiunge (o si toglie) ai generatori un vettore combinazione lineare degli altri. Lemma fondamentale (scambio di elementi dipendenti in uno span). Spazi di dimensione finita: teorema di esistenza della base; teorema della dimensione sul numero degli elementi in una base e definizione di dimensione; teorema del completamento a base di un sistema indipendente; teorema: un numero di vettori indipendenti pari alla dimensione genera lo spazio. La dimensione di un spazio esprime il massimo numero di vettori (mutuamente) indipendenti in uno spazio e il minimo numero di vettori necessari a generarlo. Coordinate rispetto ad una base. Teorema di Grassmann sulle dimensioni della somma e dell'intersezione di due sottospazi; il caso della somma diretta.

Teoria dei sistemi lineari.

Esistenza di soluzioni e teorema di Rouchè. Indipendenza delle colonne e unicità della soluzione. Teorema di Cramer sui sistemi quadrati. Indipendenza della base canonica e dimensione di $\mathbb{R}^n$. Indipendenza di sistemi triangolari e ortogonali. Sistemi a scala: indipendenza dei vettori relativi alle variabili pivot e dipendenza degli altri. Basi per i polinomi di grado non maggiore di n: indipendenza delle potenze e principio d'identità dei polinomi. Dipendenza lineare negli spazi di funzioni: $\sin x$ e $\cos x$; esponenziali complessi a coefficienti distinti; fratti semplici. La decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali con grado del numeratore strettamente minore di quello del denominatore è sempre possibile: il caso in cui le radici del denominatore sono reali, semplici o multiple. Indipendenza e dimensione in $\mathbb{R}^n$: uso dell'algoritmo di Gauss per l'analisi dei sistemi lineari coinvolti in vari problemi legati all'indipendenza (indipendenza di tutte e sole le colonne pivot): estrarre una base da un sistema di generatori; calcolare la dimensione di uno span; stabilire se un insieme di vettori è completabile ad una base e completarlo con vettori della base canonica scelti opportunamente. Dipendenza, indipendenza, dimensione e basi in $\mathbb{R}^n$. I sistemi di vettori a scala e ruolo dei pivot. Impiego dell'algoritmo di Gauss di riduzione a scala 1) per stabilire la dimensione dello span di un numero finito di vettori; 2) per stabilire se un vettore appartenga o no allo span di un numero finito di vettori; 3) per stabilire se n vettori in $\mathbb{R}^n$ formino o no una base; 4) per completare ad una base un sistema di vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$; 5) per stabilire l'indipendenza o la dipendenza di un sistema di vettori in $\mathbb{R}^n$; 6) per estrarre da un sistema di generatori una base. La dimensione di $\mathbb{C}^n$ rispetto a $\mathbb{C}$ e ad R.

Applicazioni lineari.

Applicazioni lineari iniettive, suriettive, biiettive (invertibili): comportamento dell'equazione $A(x) = y$. Immagine di un punto; immagine inversa o controimmagine di un valore nell'immagine. Nucleo e iniettività. Struttura dell'insieme delle soluzioni: problema omogeneo associato e soluzione particolare. Esempi di applicazioni lineari fra spazi di dimensione infinita (la derivata) e da uno spazio di dimensione infinita a $\mathbb{R}$ (l'integrale). L'immagine e il nucleo sono rispettivamente sottospazi del codominio e del dominio. Immagini inverse arbitrarie di vettori indipendenti sono indipendenti. La dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare su uno spazio di dimensione finita è minore o eguale a quella del suo dominio. Teorema di Grassmann sulle dimensioni del dominio, del nucleo, dell'immagine. I casi nei quali il nucleo o l'immmagine hano dimensione zero. Invarianza della dimensione per le applicazioni iniettive. Rappresentazione come (opportuno) prodotto della generica applicazione lineare fra spazi euclidei: da R in R, da R in $\mathbb{R}^n$, da $\mathbb{R}^n$ in R e da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Applicazioni lineari fra spazi di dimensione finita: matrice di rappresentazione relativa a basi fisate del dominio e dell'immagine. Matrice di rappresentazione della derivata dallo spazio dei polinomi di grado minore o eguale a 2 a quello dei polinomi di grado minore o eguale a 1. Studio dell'applicazione $t\int_0^1 p(s)ds + \int_0^2 p(s)ds$ definita sui polinomi p di grado massimo 2 a valori sui polinomi di grado massimo 1: linearità e matrice di rappresentazione rispetto alle basi $(1, t, t^2)$ e $(2, t-1)$. Esempi vari di funzioni non lineari, studiate usando la definizione. Uso dell'algoritmo di Gauss per il calcolo della dimensione dell'immagine e del nucleo di un'applicazione lineare. Matrice associata ad un cambio di base: formule di trasformazione delle coordinate e della matrice di rappresentazione di un applicazione lineare da uno spazio in sè. Calcolo di una matrice di cambio di base per una rotazione. Spazio duale di uno spazio vettoriale e base duale di una sua base fissata: lo spazio duale di uno spazio di dimensione finita ha uguale dimensione.

Determinanti.

Il determinante e sue proprietà caratteristiche (di Artin): valore sulla matrice identica, altenanza, multilinearità. Matrici con righe uguali. Se A1,..,An sono dipendenti il determinante è zero. Esistenza, unicità e formula risolutiva dei sistemi lineari quadrati a determinante non nullo (formula di Cramer). Numero di inversioni, segno di una permutazione e definizione di determinante. Proprietà conseguenti (senza dimostrazione): il determinante della matrice trasposta; multilinearità e alternanza rispetto alle righe; determinante della matrice prodotto (teorema di Binet); calcolo diretto del determinante per le matrici 2×2 e 3×3. Conteggio delle permutazioni su n interi, e valutazione della complessità di calcolo del determinante. Determinante di una matrice avente il primo vettore della base canonica come prima colonna. Sviluppo di Laplace secondo gli elementi della prima colonna. Cofattori e sviluppo di Laplace di un determinante secondo una riga o una colonna. Inversa di una matrice e cofattori. L'esistenza dell'inversa destra implica quella della sinistra e la loro eguaglianza. Determinanti di matrici diagonali e triangolari. Il determinante non varia sommando ad una riga o colonna un multiplo di un'altra: calcolo del determinante mediante l'algoritmo di Gauss. Valutazione della complessità di calcolo dei vari metodi di calcolo del determinante. Sistemi omogenei equivalenti: eliminazione delle righe dipendenti. Minori estratti e indipendenza di vettori in $\mathbb{R}^n$: condizione necessaria e sufficiente. Rango e ordine dei minori estratti. Valutazione della complessità del calcolo: numero delle disposizioni con e senza ripetizioni, delle combinazioni, delle permutazioni. Il triangolo di Tartaglia per il calcolo rapido dei coefficienti binomiali. Numero dei minori $k \times k$ estratti da una matrice $m \times n$.

Diagonalizzazione.

Il problema del segno di una forma quadratica (polinomio omogeneo di secondo grado) in più variabili: esempi. Studio nel caso diagonale: coefficienti tutti non nulli e concordi, due coefficienti non nulli e discordi, alcuni coefficienti nulli e gli altri concordi. Forme bilineari su uno spazio euclideo e forme quadratiche astratte associate. Rappresentazione di forme bilineari e quadratiche astratte rispetto ad una base fissata e forme quadratiche elementari. Forma bilineare simmetrica associata alle forme quadratiche: unicità. Operatore lineare associato alle forme bilineari negli spazi euclidei: unicità. Forme diagonalizzabili e condizione necessaria e sufficiente: il problema degli autovettori per l'operatore associato. Autovalori, autovettori, autospazi, spettro. Esistenza di soluzioni non nulle per il problema degli autovalori negli spazi complessi: equazione caratteristica. Esempio di matrice priva di autovalori reali e dotata di autovalori complessi: calcolo degli autospazi. Esempio di applicazione non diagonalizzabile. Indipendenza di autovettori in autospazi distinti. Un'applicazione su uno spazio complesso di dimensione finita con autovalori distinti è diagonalizzabile. Il caso autoaggiunto complesso: gli autovalori sono reali; il complemento ortogonale di un insieme di autovettori è mutato in sè dall'operatore; autovettori in autospazi distinti sono ortogonali; ogni operatore autoaggiunto su uno spazio complesso di dimensione finita è diagonalizzabile (teorema spettrale). Il teorema spettrale per le matrici simmetriche reali: ortogonalità con vettori reali in $\mathbb{C}^n$; una almeno fra le parti reali e immaginarie di autovettori di una matrice reale è un autovettore reale; per ogni matrice simmetrica reale esiste una base ortonormale in $\mathbb{R}^n$ formata da suoi autovettori. Condizione sulla matrice di rappresentazione necessaria e sufficiente perché un operatore sia autoaggiunto. Studio del segno di forme quadratiche in più variabili: regola dei segni di Cartesio e uso dell'algoritmo di Gauss assieme al teorema di Sylvester per lo studio del segno degli autovalori senza calcolarli. Diagonalizzazione delle matrici simmetriche: calcolo di autovalori e autovettori e determinazione di una matrice di cambio di base che diagonalizza una matrice data.

ANALISI MATEMATICA II

LIMITI, CONVERGENZA, CONTINUITA'.

Introduzione all'analisi matematica in piùvariabili: curve, superficie, funzioni scalari di più variabili viste come funzioni fra spazi vettoriali. Distanza euclidea: assiomi. Sfere aperte e chiuse di centro un punto e raggio assegnato. Definizione di funzione continua e di funzione convergente in un punto fra spazi euclidei. Punti interni, esterni, di frontiera. Punti isolati e di accumulazione. Insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti. Limiti finiti e infiniti, al finito e all'infinito, di funzioni scalari e vettoriali; funzioni oscillanti. Limiti di successioni: successioni a valori vettoriali convergenti, divergenti e oscillanti. Condizione di Cauchy per la convergenza. La convergenza in $\mathbb{R}^n$ equivale alla convergenza delle componenti. Insiemi connessi (per archi) e teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue su insiemi connessi che assumano valori discordi. Proprietà delle funzioni convergenti: permanenza del segno, teorema di Weierstrass sui punti estremi (senza dimostrazione). Cambio di variabile nei limiti: Controesempio senza ipotesi addizionali e prova nelle tre ipotesi alternative. Convergenza in $\mathbb{C}$. Esempi di polinomi in due variabili di secondo grado non divergenti all'infinito. Prova della divergenza all'infinito dei polinomi nel campo complesso. Una funzione continua divergente all'infinito ha minimo globale: il caso particolare del modulo di un polinomio complesso. Il teorema di Gauss di esistenza degli zeri complessi per un polinomio non costante. Coni e funzioni omogenee. Funzioni omogenee di grado positivo su $\mathbb{R}^n$ sono infinitesime. Funzioni k-omogenee, k non positivo, non costanti non hanno limite in 0. Limiti di forme indeterminate. Esempio di funzione infinitesima sulle rette per l'origine e ivi non convergente. Uso del cambio di variabile nei limiti di funzioni composte: le varie ipotesi che lo rendono lecito in casi pratici. Uso dello studio del segno delle forme quadratiche nel calcolo dei limiti e nello studio del dominio di funzioni di più variabili. Effetti delle velocità di convergenza a zero diverse per le diverse variabili: x^{x+y} in $(0,0)$ non ha limite.

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIU' VARIABLI.

Derivate direzionali. Derivate parziali e loro calcolo. Notazioni ed esempi. Esempi. Esempio di funzione che ha tutte le derivate direzionali nulle ma che non è convergente in $(0,0)$. Il teorema di Fermat sull'annullamento delle derivate direzionali negli estremi locali interni. Differenziale e differenziabilità. Le funzioni lineari e le forme quadratiche sono differenziabili. Differenziabilità e continuità. Differenziabilità e derivate direzionali: formula del differenziale di una funzione di n variabili. Il gradiente e rappresentazione del differenziale di funzioni fra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}$. Rappresentazione del differenziale come prodotto opportuno negli altri casi di funzioni fra spazi euclidei: funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (derivabilità), da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$ (esistenza della velocità), da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ (matrice Jacobiana). Funzioni lineari in w di tipo $o(|w|)$ e unicità del differenziale. Piano tangente e vettore normale al grafico. Esempio di funzione continua non differenziabile in un punto: la norma. Calcolo delle derivate direzionali facendo uso delle derivate parziali per le funzioni differenziabili. Funzioni di classi C^1 e differenziabilità. Differenziale di funzioni composte(enunciato). Impiego della rappresentazione del differenziale come prodotto nelle applicazioni del teorema di composizione: la formula classica in $\mathbb{R}$ e la derivata di $f(g(x))$ con $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ ed f:$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Cenno alla linearizzazione. Equazione delle curve di livello regolari. Valore massimo e minimo della derivata nella direzione dei versori: direzione di massima pendenza ascendente e discendente. Differenziabilità di funzioni: impiego del teorema di differenziabilità delle funzioni C^1 o studio del gradiente (anche attraverso la definizione, nei casi che lo richiedano) per individuare la funzione lineare da inserire nella definizione di differenziale. Il caso $f(x,y) = |xy|^k, k \in \mathbb{R}$, in tutti i punti del dominio. Il caso $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$. Derivate parziali di ordine superiore: definizione e notazioni. Matrice Hessiana. Teorema di Schwarz (enunciato) sull'inversione dell'ordine di derivazione e simmetria della matrice Hessiana per le funzioni C^2. Formula di Taylor. Condizioni sul segno degli autovalori della matrice Hessiana sufficienti perché un punto sia di massimo o minimo locale (inizio): il caso degli autovalori non nulli e concordi (massimi o minimi locali propri); il caso di due autovalori non nulli e discordi (punti di sella non degeneri); il caso degenere quando gli autovalori non nulli siano concordi: ruolo dei termini di ordine superiore ed esempi.

CURVE E INTEGRALI CURVILINEI.

Curve regolari ed esempio di curva C^1 non regolare il cui sostegno è un grafico cartesiano con una cuspide $\gamma(t) = (t^3, t^2)$. Curve rettificabili: lunghezza delle poligonali inscritte e definizione di lunghezza. Esempio di curva continua non rettificabile. Rettificabilità delle curve C^1. La lunghezza di curve equivalenti è uguale, indipendentemente dal verso di percorrenza (scala dei tempi strettamente crescente o strettamente decrescente). Calcolo di lunghezze (elica cilindrica). Lunghezza di curve in coordinate polari piane, cilindriche e sferiche, di grafici cartesiani e polari. La spirale d'Archimede. Ascissa curvilinea, integrale curvilineo di funzioni e relativa formula per il calcolo (solo enunciata).

PRIMITIVE IN PIU‘ VARIABILI.

Introduzione alla teoria del potenziale: campi di vettori, forme differenziali lineari; rappresentazione delle forme differenziali lineari mediante campi di vettori e prodotti scalari. Il problema della primitiva. Integrale di un campo (o di una forma differenziale) su una curva regolare. Integrabilità di campi vettoriali e forme differenziali: primitive o potenziali (scalari); forme esatte o integrabili; campi integrabili o potenziali. Campi irrotazionali e forme chiuse: una condizione necessaria per l'integrabilità di campi e forme di classe C^1. L'integrale di un campo o di una forma esteso ad una curva regolare a tratti; congiunzione di curve e additività dell'integrale rispetto alla congiunzione. Una condizione necessaria per l'integrabilità di campi e forme continue: l'indipendenza dell'integrale dal cammino e dipendenza solo dagli estremi (differenza di potenziale). Esempio di campo irrotazionale non integrabile: $(y/(x^2+y^2, -x/(x^2+y^2)$. Condizione sufficiente per l'integrabilità di campi C^0: l'indipendenza dell'integrale dal cammino. Costruzione pratica del potenziale di un campo mediante integrale su cammini opportuni. Integrazione diretta del sistema delle derivate parziali: costanti di integrazione come funzioni delle variabili residue. Comportamento del metodo nel caso di campi non integrabili: il caso di $(y/x^2+y^2), -x(x^2+y^2)$. Effetto dell'inversione del verso di percorrenza della curva sull'integrale di un campo arbitrario. Campi continui integrabili (dotati di potenziale) e integrale sulle curve chiuse: nuova formulazione della condizione caratteristica. Curve equivalenti e invarianza dell'integrale di un campo arbitrario per curve equivalenti (a meno del segno). Omotopia o deformazione di curve. Aperti semplicemente connessi. Aperti a stella (o convessi rispetto ad un punto) e costruzione dell'omotopia di una qualunque curva chiusa su una curva costante. Teorema di invarianza omotopica dell'integrale di un campo irrotazionale (enunciato). I campi irrotazionali su aperti semplicemente connessi sono integrabili. Costruzione di tutti i potenziali di campi (forme) integrabili sul loro dominio, connesso o sconnesso. La forma $(xdy - ydx)/2$ e l'area di regioni piane. Costruzione esplicita di potenziali di $(y/(x^2+y^2), -x/(x^2+y^2))$ nel piano tagliato lungo una qualunque semiretta uscente dall'origine.

FUNZIONI IMPLICITE.

Introduzione al problema delle funzioni definite mediante equazioni (funzioni implicite). Teorema delle funzioni implicite di U.Dini: il caso di funzioni di due variabili continue e strettamente monotone rispetto ad una delle due. Il caso delle f di classe C^1. Derivabilità della funzione phi definita implicitamente da $f(x, y) = 0$; formula della derivata. Continuità e derivabilità in tutto l'intervallo di definizione. Generalizzazioni (solo enunciato): equazione singola in più di due variabili; sistemi di m equazioni (non lineari) in $n+m$ incognite: condizione sul determinante Jacobiano ed espressione delle derivate delle funzioni definite implicitamente dal sistema. Teorema di inversione locale. Esempi riguardanti il teorema delle funzioni implicite e quello di inversione locale: struttura delle soluzioni di un sistema di due equazioni in tre incognite; curve regolari; invertibilità delle coordinate polari.

CENNI DI TEORIA DELLA MISURA. (solo enunciati)

Misura degli intervalli, dei plurintervalli, degli aperti, dei compatti. Insiemi misurabili secondo Lebesgue: misura interna, esterna e misura di Lebesgue di un insieme misurabile. Proprietà della misura: monotonia, numerabile e finita additività e subadditività. Proprietà della misura e degli insiemi misurabili. Misura del punti e degli insiemi finiti o numerabili. Aperti densi di misura arbitrariamente piccola.

L'INTEGRALE DI LEBESGUE.

Integrale di Lebesgue di funzioni limitate su insiemi di misura finita: partizioni misurabili, somme superiori ed inferiori. L'integrale di funzioni positive non limitate e definite su insiemi di misura infinita. La parte positiva e negativa: integrale di funzioni di segno variabile su insiemi arbitrari. Misurabilità di funzioni. Proprietà delle funzioni misurabili (solo enunciato): misurabilità ed operazioni aritmetiche, sup, inf. Integrabilità delle funzioni misurabili e limitate su insiemi di misura finita. Integrabilità e assoluta integrabilità: confronto fra integrale di Lebesgue e integrali impropri di Riemann (solo enunciato). Teoremi di Beppo Levi e di Lebesgue di passaggio al limite sotto il segno d'integrale (enunciati). Teoremi di Fubini e di Tonelli sugli integrali iterati (solo enunciati). Domini normali rispetto agli assi e formule pratiche di riduzione di integrali multipli ad integrali semplici iterati. Cambi di variabili per gli integrali multipli (enunciato). Calcolo dell'integrale della densità gaussiana su $\mathbb{R}$. Integrabilità all'infinito di $(x^2 + y^2)^k$. Formule di Gauss-Green-Ostrogradskij-Stokes... area di una regione piana mediante le formule di Gauss-Green integrando sul bordo opportune forme differenziali. Frontiere interne ed esterne: orientamento positivo.

SUPERFICIE REGOLARI E INTEGRALI SUPERFICIALI (solo enunciati).

Superficie parametriche regolari; sistema di generatori dello spazio tangente; piano parametrico tangente; vettore normale mediante il prodotto vettore dei generatori. Formula dell'area di una superficie regolare. Integrale superficiale di una funzione su una porzione superficie regolare.