Note Title 12/20/2021

$\rightarrow$ $x' + a(t)x = f(t)$ LINEARE (del I ordine)

$e^{\int a(t)}x' + a(t)e^{\int a(t)}x = f(t)e^{\int a(t)}$

METODO DELLA VARIAZIONE DELLA COSTANTE (ARBITRARIA)

$\rightarrow$ $x' + a(t)x = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

$x' = -a(t)x$

$x \neq 0$

$\frac{x'}{x} = -a(t)$

$\lg|x| = -\int a(t) + c$

$|x| = e^{c} e^{-\int a(t)} = K e^{-\int a(t)}$

$= e^{c} > 0$

L'insieme delle soluzioni dell'omogenea

$x(t) = \boxed{h} e^{-\int a(t)}$ $\rightarrow$ $h \in \mathbb{R}$ costante arbitraria

(integrale generale, oppure soluzione generale)

(LAGRANGE) Una soluzione particolare dell'eq. originale (completa) è del tipo

$$x(t) = h(t)\, e^{-\int a(t)}$$

la costante arbitraria viene sostituita da una funzione, da determinare.

$$x'(t) = h'(t)\, e^{-\int a(t)} + h(t)\left(-a(t)\right) e^{-\int a(t)}$$

sostituendo:

$$h' e^{-\int a(t)} - a(t) h(t) e^{-\int a(t)} + a(t) h(t) e^{-\int a(t)} = f(t)$$

$$h' = f(t)\, e^{\int a(t)} \Rightarrow h(t) = \int f(t) e^{\int a(t)}$$

$$x(t) = e^{-\int a(t)} \int f(t) e^{\int a(t)}$$

$$u' + u \operatorname{tg} t = \frac{1}{\sin t}$$

t

$u' + u \operatorname{tg} t = 0 \iff u \neq 0$

$\frac{u'}{u} = -\frac{\sin t}{\cos t}$ $\quad \cos t \neq 0$

$\lg|u| = \lg|\cos t| + c$

$|u| = e^c \, e^{\lg|\cos t|} =$

$= e^c |\cos t|$

$u = k \cos t$

$u = K \cos t$ integrale generale dell'omogenea associata

$u' = k' \cos t - k \sin t$

$k' \cos t - k \sin t + k \cos t \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\sin t}$

$k' = \frac{1}{\sin t \cos t}$

$$\int \frac{1}{\sin t \cos t} dt = \begin{matrix} u = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ t = 2 \operatorname{arctg} u \\ dt = \frac{2}{1+u^2} \end{matrix} \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du =$$

$$= \int \frac{1+u^2}{2u(1-u^2)} du = \int \frac{A}{u} + \int \frac{B}{1-u} + \int \frac{C}{1+u} = \lg|u| + \lg|1-u| - \lg|1+u|$$

$$\int \frac{1}{u} + \int \frac{1}{1-u} - \int \frac{1}{1+u}$$

$$\lg|u| - \lg|1-u| - \lg|1+u|$$

$$\lg|1-u|$$

$$\frac{1+u^2}{u(1-u)(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{1+u}$$

moltiplico per u e faccendo $u \to 0$ ottengo

$$\frac{1}{1} = A$$

moltiplicando per $1-u$ e facendo $u \to 1$

$$\left.\frac{1+u^2}{u(1+u)}\right|_{u\to 1} = \frac{2}{2} = 1 = B$$

moltiplic. per $1+u$ e facendo $u \to -1$

$$\frac{2}{-1\cdot 2} = -1 = C$$

La soluzione generale dell'eq. completa è uguale a

$$\underbrace{k\cos t}_{\text{integrale generale dell'omogenea } k \in \mathbb{R}} + \lg\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| - \lg\left|1-\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| - \lg\left|1+\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|$$

$$\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t} =$$

$$\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t \cos t} = \frac{\sin t + \cos t}{}$$

$$u'' - u = \frac{1}{1+e^t} \quad (*)$$

NON È UN POLINOMIO in un esponenziale complesso.

lineare a coeff. costanti.

$u'' - u = 0$ secondo ordine

$\lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 1$ semplice
$\lambda = -1$

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} = u(t)$$

Variazione delle costanti arbitrarie

Soluzione particolare di $(*)$ della forma $u(t) = c_1(t) e^t + c_2(t) e^{-t}$

$$u' = \underbrace{c_1' e^t + c_2' e^{-t}}_{=0} + c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

Imponiamo che c_1 e c_2 verifichino

$$c_1' e^t + c_2' e^{-t} = 0$$

$$u'' = c_1' e^t - c_2' e^{-t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Sostituendo u'' e u nell'eq. ogiuale che

$$c_1' e^t - c_2' e^{-t} + \cancel{c_1 e^t} + \cancel{c_2 e^{-t}} \underbrace{- \cancel{c_1 e^t} - \cancel{c_2 e^{-t}}}_{-u} = \frac{1}{1+e^t}$$

u''

$$\begin{cases} c_1' e^t + c_2' e^{-t} = 0 \\ c_1' e^t - c_2' e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^t} \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$2 e^t c_1' = \frac{1}{1+e^t} \qquad c_1' = \frac{1}{2e^t(1+e^t)}$$

Sottraendo membro a membro

$$2 c_2' e^{-t} = -\frac{1}{1+e^t} \qquad c_2' = -\frac{e^t}{2(1+e^t)}$$

$$c_2 = -\int \frac{e^t}{2(1+e^t)}\,dt \overset{\substack{e^t = u \\ e^t dt = du}}{=} -\int \frac{1}{2(1+u)}\,du = -\frac{1}{2}\ln|1+u| =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+e^t| =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+e^t) =$$

$$= -\ln\sqrt{1+e^t} =$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{1+e^t}}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{e^t(1+e^t)} \overset{\substack{e^t = u \\ t = \ln u \\ dt = \frac{1}{u}du}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u(1+u)}\,\frac{1}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2(1+u)}\,du$$

$u^2(1+u)$ ha
$u=0$ doppio e
$u=-1$ semplice

$$\frac{1}{u^2(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{1+u}$$

$B = 1$ (moltiplico per u^2 e faccio $u \to 0$)

$C = 1$ (moltiplico per $(1+u)$ e faccio $u \to -1$)

$$\frac{1}{u^2(1+u)} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{1+u} = \frac{A}{u}$$

$$\frac{1-(1+u)-u^2}{u^2(1+u)} \qquad \frac{-u-u^2}{u^2(1+u)} = \frac{A}{u}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\log|u| - \frac{1}{u} + \log|1+u|\right)\Big|_{u=e^t} \quad \Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{-\log|e^t|}_{t} - \frac{1}{e^t} + \log(1+e^t)\right) = \frac{-t - \frac{1}{e^t} + \log(1+e^t)}{2}$$

$$A = \frac{-u^2-u^3}{u^2(1+u)} = \frac{-1-u}{1+u} = -1$$

$$\begin{cases} u' + u - v = e^t \\ v' - 4u + v = t + 3 \end{cases}$$ termini noti

u, v incognite (funzioni)

$u'' + u = \sin t$ eq. II ordine

Dalla I equazione, derivando, si ottiene

$u'' + u' - v' = e^t$ cioè $v' = u'' + u' - e^t$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' + u = \sin t \end{cases}$$ sistema di I ordine

sostit. nella II equazione

$$u'' + u' - e^t - 4u + v = t + 3$$

$$\boxed{v = -u'' - u' + 4u + e^t + t + 3} \quad (*)$$

sost. la v nella I equazione

$$u' + u + u'' + u' - 4u - e^t - t - 3 = e^t$$

$$u'' + 2u' - 3u = 2e^t + t + 3$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$-1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} -1-2 = -3 \\ -1+2 = 1 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$\lambda = -3$

OMOGEN.

$$c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$$

$u'' + 2u' - 3u = 2e^t$ RISONANTE

$u'' + 2u' - 3u = t + 3$ NON risonante

$u'' + 2u' - 3u = 2e^t$ ↑ grado 0

anche solve del tipo

e^t ha coeff. $\lambda = 1$ che è una radice semplice $\mu = 1$

$u = ate^t$ $u' = ae^t + ate^t$

$u'' = ae^t + ae^t + ate^t$

$2ae^t + ate^t + 2ae^t + 2ate^t - 3ate^t = 2e^t$

$4ae^t = 2e^t$ $\quad a = \frac{1}{2}$ $\quad u = \frac{1}{2}te^t$

$u'' + 2u' - 3u = t + 3$ $\quad u = at + b$ $\quad u' = a$ $\quad u'' = 0$

$2a - 3at - 3b = t + 3$

$\begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 3 \end{cases}$ $\quad a = -\frac{1}{3}$ $\quad -2/3 - 3b = 3 \Rightarrow -3b = \frac{11}{3}$ $\quad b = -\frac{11}{9}$ $\quad u = -\frac{1}{3}t + \frac{11}{9}$

$$u(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-3t} - \frac{1}{3}t + \frac{11}{9} + \frac{1}{2}te^{t}$$

sostituendo in (*) si ottiene lo 0.

DISPOSIZIONI (Permutations)

$A = \{a_1\ a_2 \dots a_n\}$ $D_{n,k}$ SENZA RIPETIZIONI

$k < n$

$a_1\ a_2 \dots a_k$

$a_2\ a_1 \dots a_k$

$a_{n-k+1}\ a_{n-k+2} \dots a_n$

} Diverse possibili scelte di k oggetti fra gli n disponibili in uno specifico ordine

funzioni da $\{1, \dots, k\}$ in A INIETTIVE

Le possibili coppie ordinate sono le funzioni da $\{1,2\}$ in A

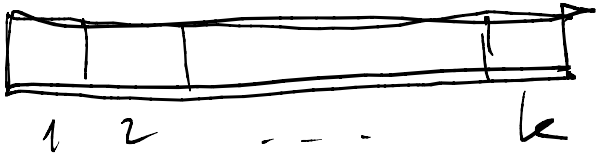
$A = \{1\ 2\ 3\ 4\}$

1 2	2 1	3 1	4 1
1 3	2 3	3 2	4 2
1 4	2 4	3 4	4 3

$D_{4,2}$

Quante sono le disposizioni di n elementi a k alla volta, SENZA RIPETIZIONI

$a_1 \dots a_n$

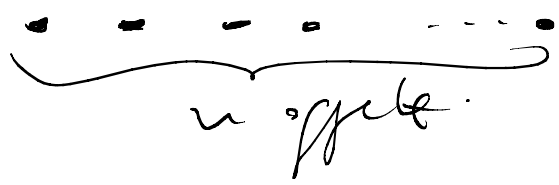


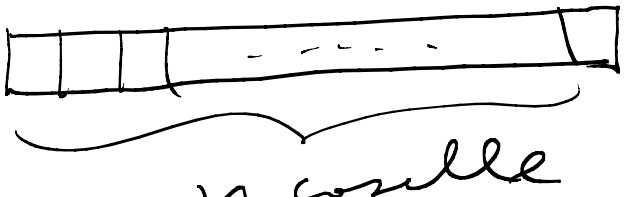
Il primo elemento può essere scelto a piacere in n possibili modi

Per ogni scelta del I elemento, il II può essere scelto in $n-1$ modi, il III in $n-2$ modi ... $n-(k-1)$

Il numero totale $D_{n,k} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ fattori}}$

$D_{n,n}$ le funzioni iniettive da $\{1 \dots n\} \to \{a_1 \dots a_n\}$





$D_{n,n} = P_n$ PERMUTAZIONI su $\{a_1 \dots a_n\}$

Il loro numero è $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

$$D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Mazzo di 52 carte

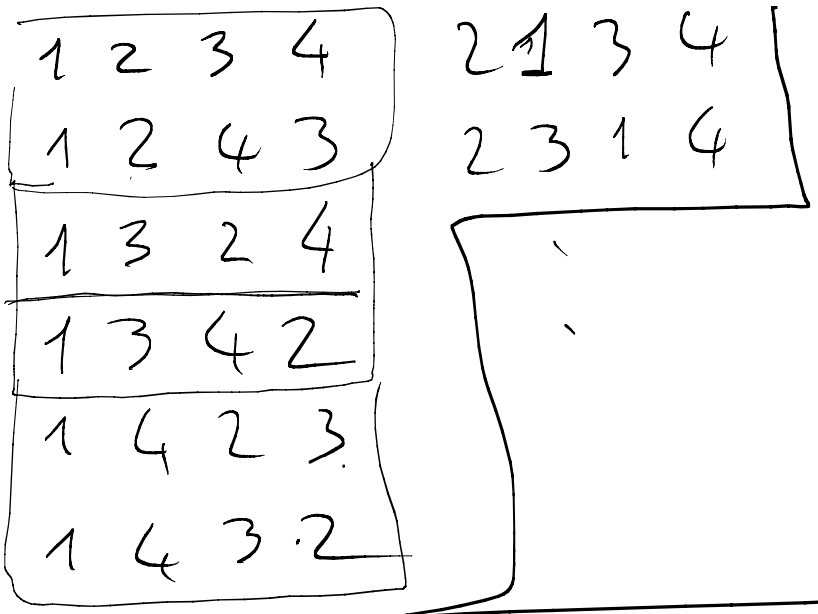
Quante sono le possibili mani di 5 carte che si possono estrarre dal mazzo.

$$\overset{n}{52} \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \overset{n-5+1}{48} \qquad D_{52,5}$$

$\underbrace{C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5}$ carte ricevute

posso avere ricevuto in un modo qualunque nel quale è possibile ordinarle. Tali modi sono $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

$$\frac{D_{52,5}}{P_5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{120}$$



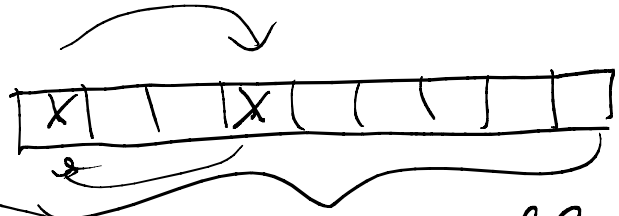
$C_{n,k}$ combinazioni di n elementi a k alla volta = sottinsiemi di k elementi

$$D_{n,k} = C_{n,k} P_k$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$ coefficienti binomiali

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ volte}}$$



$a^n \quad a^{n-1}b \quad a^{n-2}b^2 \quad \cdots\cdots \quad a^2b^{n-2} \quad ab^{n-1} \quad b^n$

n caselle

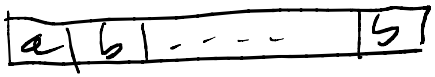
a^2b^{n-2}

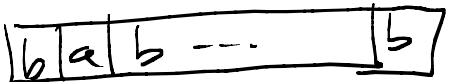
$a^k b^{n-k}$ il monomio appare tante volte quanti sono i sottinsiemi distinti di k elementi scelti in $1 \cdots n$

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ si legge n su k

$a b^{n-1}$ quante volte appare nella sviluppo





--

appare n volte $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} =$

$= n$

$a^{n-1} b$ il coeff. è lo stesso

se ho solo fattori a e solo fattori b nello sviluppo ci accade una sola volta

$a^n + b^n$ → si presentano sempre volte

$$k=n \qquad \binom{n}{k} = n$$

coeff di b^n $\quad a^k b^{n-k}$ $\quad b^n$ compare a $k=0$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!}$$

DEFINIZIONE $\boxed{0! = 1}$

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1 \quad \text{con } 1 \text{ p. a } b^n$$

$a+b = (a+b)^1 = 1a + 1b$

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 2 1 →

$n=3$ 1 3 3 1 →

⋮ 4 1 4 6 4 1

5 1 5 10 10 5 1

6 1 6 15 20 15 6 1

TRIANGOLO DI TARTAGLIA (o di PASCAL)

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}}$$

$n=4$

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)}{(k-1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1) + k\left[n(n-1)\cdots(n-k+2)\right]}{k!} =$$

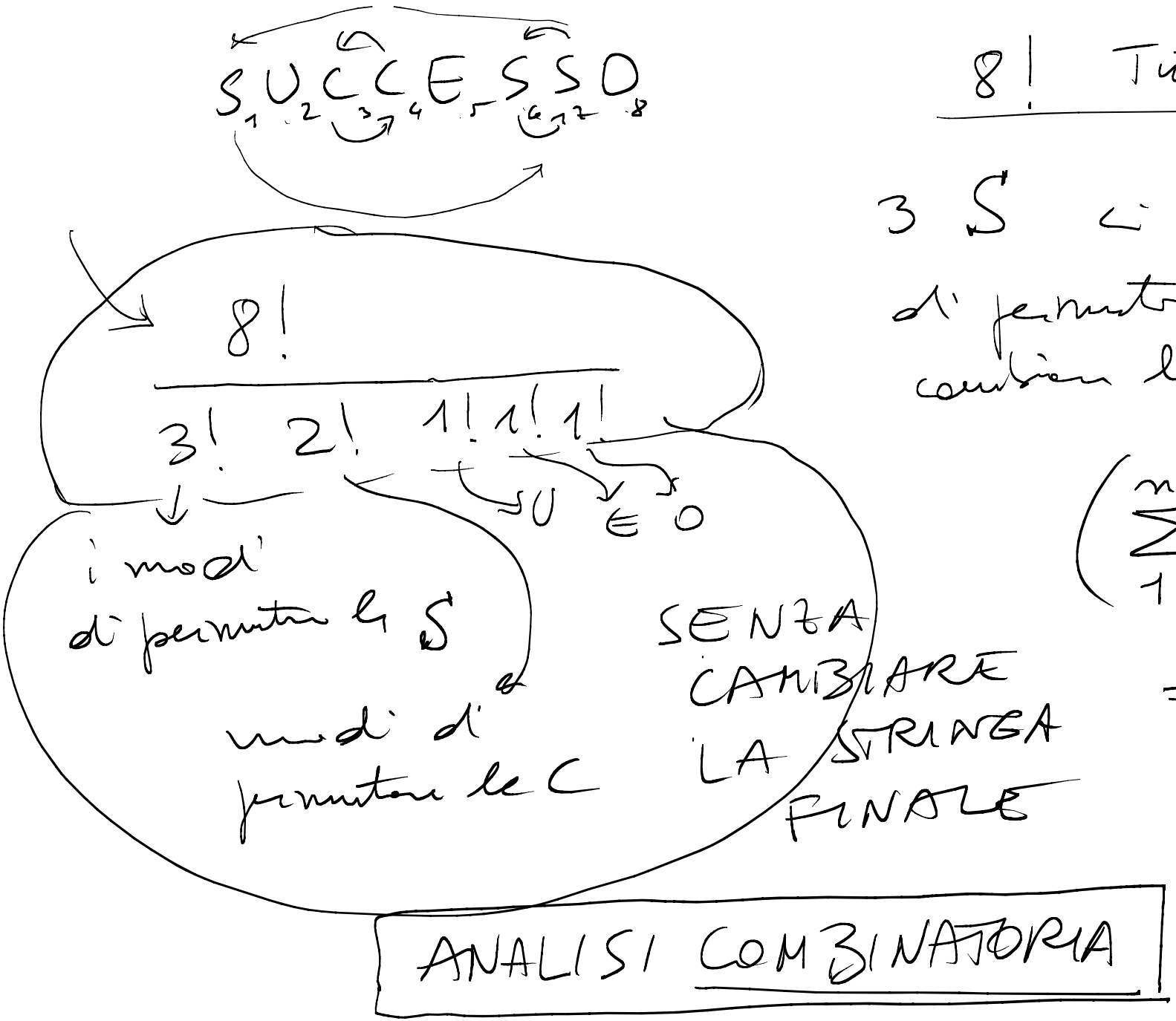
$$= \frac{\left[n(n-1)\cdots(n-k+2)\right]\left\{n-k+1+k\right\}}{k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!}$$

a_1 a_2 a_3 a_4

2 elementi, con eventuali ripetizioni

$\overline{D}_{n,k} = n^k$ $\overline{D}_{n,n} = n^n$

ogni elemento ha n scelte possibili per ogni scelta degli altri



8! Tutte le permutazioni

3 S ci saranno 3! modi di permutarle senza cambiare la stringa

$$\left(\sum_{1}^{n} a_i\right)^N = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=N} \frac{N!}{i_1!\, i_2! \cdots i_n!} \cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}$$