Note Title 12/16/2021

$\sum_0^n a_k x^{(k)} = 0$ $\quad a_k \in \mathbb{R}$ Equaz. diff. a coeff. costanti REALI

Eq. caratteristica $\sum_0^n a_k \lambda^k = 0$ se ha radici complesse λ (non reali) allora ha anche la radice $\bar{\lambda}$

$t^m e^{\lambda t}$ $\quad$ $t^m e^{\bar{\lambda} t}$ $\quad$ $m <$ molteplicità della radice λ (ed anche $\bar{\lambda}$)

sono entrambe presenti se i coeff. sono reali

$\lambda = a + ib$ $\quad (b \neq 0)$ $\quad e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$

$\bar{\lambda} = a - ib$ $\quad e^{\bar{\lambda} t} = e^{at - ibt} = e^{at}(\cos bt - i \sin bt)$

$\frac{1}{2}\left[e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}\right] = \cos bt \cdot e^{at}$ $\quad$ $\frac{1}{2i}\left[e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}\right] = \sin bt \, e^{at}$

$$x^{IIII} + x^{II} = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2+1) = 0$$

polinomio caratteristico

$\lambda = 0$ doppia $(\mu = 2)$

$\lambda = i$ semplice

$\lambda = -i$ semplice

$e^{0t} \equiv 1$

$\langle 1, t, e^{it}, e^{-it} \rangle \equiv$

$\equiv \mathrm{span}\{1, t, e^{it}, e^{-it}\} \equiv$

$\equiv \langle 1, t, \cos t, \sin t \rangle$

se $\lambda = \underbrace{2}_{a} + \underbrace{3}_{b} i$ $(\Rightarrow \bar{\lambda} = 2 - 3i)$

$e^{2t}\cos 3t$, $e^{2t}\sin 3t$

combinazioni lineari di $e^{(2+3i)t}$ ed $e^{(2-3i)t}$

$$\sum_0^n a_k x^{(k)} = f(t) \in C^0 \qquad \ddot{x} + x = f(t)$$

$$A(x) = \sum_0^n a_k x^{(k)}$$

combinazione lineare di operatori lineari $I, D, D^2, \dots D^n$

$$A(x+y) = \sum_0^n a_k (x+y)^{(k)} = \sum_0^n a_k x^{(k)} + \sum_0^k a_n y^{(k)} =$$

$$= A(x) + A(y)$$

$$A(\lambda x) = \sum_0^n a_k (\lambda x)^{(k)} = \sum_0^n a_k \lambda (x^{(k)}) = \lambda A(x)$$

$\Rightarrow$ A è lineare

$$A(x) = f \quad A(y) = g \quad \Rightarrow A(\alpha x + \beta y) = \alpha f + \beta g$$

$\alpha = \beta = 1 \Rightarrow A(x+y) = f + g$

principio di sovrapposizione

$$\sum_0^n a_k x^{(k)} = A(x) = f(t)$$

$$\sum_0^n a_k y^{(k)} = A(y) = f(t)$$

siano x e y due soluzioni dell'eq. completa

sottraendo membro a membro

$$\sum_0^n a_k x^{(k)} - \sum_0^n a_k y^{(k)} = f(t) - f(t) = 0$$

$$\sum_0^n a_k (x-y)^{(k)}$$

$$A(x-y)$$

DUNQUE la differenza di due qualunque soluzioni dell'equazione completa è una soluzione di quella omogenea

da cui,

Per determinare TUTTE le soluzioni di

$$\sum_0^n a_k x^{(k)} = f$$

basta

1) Trovare TUTTE le soluzioni di $\sum_0^n a_k x^{(k)} = 0$ Eq. omogenea associata

→ 2) Trovare una qualunque soluzione di

$$\sum_0^n a_k y^{(k)} = f$$

Ogni soluzione sarà del tipo $y + x$

$[(y+x) - (y) = x$ ← differenza di soluzioni dell'eq. COMPLETA

$\dot{x} = f$ Le soluz. $\dot{x} = 0$ su $\mathbb{R}$ (intervallo)

$\Leftarrow$ sono costanti

Tutte le soluzioni di $\dot{x} = f$ differiscono per una costante.

$f \in C(\mathbb{R})$ $\quad x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$

soluzione particolare del problema $\dot{x} = f$

$\sum_{0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$ Eq. differenziale lineare a coeff. costanti omogenea

$\uparrow$ costanti

$$\dot{x} + x = \sin t \qquad (*)$$

$g(t)$ è soluzione di $(*)$ se accade che

$$\dot{g}(t) + g(t) = \sin t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(se sostituisco ad x $g(t)$ si ottiene un'identità)

$$(*) \quad \sum_0^n a_k x^{(k)} = f(t)$$

$$\sum_0^n a_k \lambda^k = 0$$
polinomio caratteristico

$$f(t) = p(t)\, e^{\lambda t}$$

p polinomio reale o complesso arbitrario.

$\lambda \in \mathbb{C}$

① Una soluzione particolare dell'equazione completa $(*)$ è data da $x(t) = q(t)\, e^{\lambda t}$ con $\deg q = \deg p$ SE λ NON È UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$f(t) = p(t) \cos bt \quad \text{oppure} \quad p(t) \sin bt$$

② Se, invece, λ è uno zero del polinomio caratteristico di molteplicità μ, allora la soluzione sarà del tipo

$$t^\mu q(t)\, e^{\lambda t} \quad \text{con } \deg q = \deg p$$

$$\ddot{x} + x = \underbrace{e^{t}}_{p(t)=1} \cdot 1 = e^{1\cdot t}$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$ e quindi non è soluzione dell'eq. caratt.

e quindi una soluzione sarà del tipo

$$q(t)e^{t} \qquad \deg q = \deg p = 0$$

$$\bar{x}(t) = Ce^{t}$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = Ce^{t} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\bar{x}} + \bar{x} = Ce^{t} + Ce^{t} = 2Ce^{t}$$

$$\ddot{\bar{x}}(t) = Ce^{t} \qquad \ddot{\bar{x}} + \bar{x} = e^{t} \Rightarrow \underline{2Ce^{t} = e^{t}}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{2}}$$

Dunque UNA SOLUZIONE PARTICOLARE dell'ep. COMPLETA è $\frac{1}{2}e^{t}$. (Tutte) le soluzioni saranno

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{t}} + \underline{\alpha\cos t + \beta\sin t}$$

$$\ddot{x} + x = t^2 = t^2 e^{0t}$$

$p(t)$ grado 2

non coincide né con i né con $-i$ (soluzioni dell'eq. caratt.).

$$x(t) = q(t)e^{0t} = q(t) \quad \text{ove } \deg q = 2$$

$$\Rightarrow at^2 + bt + c$$

$$\dot{x}(t) = 2at + b$$

$$\ddot{x}(t) = 2a$$

$$2a + at^2 + bt + c = t^2$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \Rightarrow c = -2a = -2 \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = t^2 - 2$$

(*) $x'''' - x''' = t + 1 = (t+1)e^{0t}$

$\lambda^4 - \lambda^3 = 0$

$\lambda = 0 \quad \mu = 3$ triple

$\lambda = 1 \quad \mu = 1$ semplice

Una soluzione particolare di (*) sarà del tipo

$$\bar{x}(t) = t^3 q(t) e^{0t}$$

ove $q(t)$ ha lo stesso grado di $p(t) = t+1$ $\quad q(t) = at+b$

La base per lo sp. di $x'''' - x''' = 0$ è

$\langle e^t, 1, t, t^2 \rangle$

$\uparrow \quad \underbrace{\quad , \quad , \quad}_{\mu}$

$$\bar{x}(t) = t^3(at+b) = at^4 + bt^3 = -\frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{3}t^3$$

$\bar{x}' = 4at^3 + 3bt^2$

$\bar{x}'' = 12at^2 + 6bt$

$\bar{x}''' = 24at + 6b$

$\bar{x}'''' = 24a$

$\bar{x}'''' - \bar{x}''' = 24a - 6b - 24at =$

$= t + 1$

$24a - 6b = 1$

$-24a = 1$

$a = -\frac{1}{24}$

$-6b = 2$

$b = -\frac{1}{3}$

Se il coefficiente dell'esponenziale a secondo membro è soluzione dell'eq. caratteristica si parla di RISONANZA e il secondo membro è detto RISONANTE

$\ddot{x} + 4x = \cos 2t$ $\quad \lambda = b_1 = 1$ polinomio $p_2(t)$ di grado 0

$= \frac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right)$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$ radici semplici.

entrambi sono risonanti

TACOMA BRIDGE

RISONANZA

Una soluzione dell'eq. completa sarà del tipo

$x(t) = t^{\mu}\,(A\cos 2t + B\sin 2t)$

$q_1(t) \to q_2(t)$ di grado uguale $a_+(t) \equiv 1$

t^{μ}, $\mu = 1$

$$\dot{x}(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + t(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

$$\ddot{x}(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t - 2A\sin 2t + 2B\cos 2t + t(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t)$$

sostituendo in $\ddot{x} + 4x = \cos 2t$

$$-4A\sin 2t + 4B\cos 2t + t(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) + 4t(A\cos 2t + B\sin 2t) = \cos 2t$$

dall'uguaglianza dei coefficienti di sin e cos — II membro originale

$$\begin{cases} -4A = 0 \\ 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 0 \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\bar{x}(t) = t\left(0\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) = \boxed{\frac{1}{4}t\sin 2t}$$

$$\sum_0^n a_k \lambda^k = a_n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

$D \qquad D^n = D \circ D^{n-1}$ $\quad Du = u' \quad D^n u = u^{(n)}$

D operatore di derivazione.

$$\to (D-1)\left[(D-2)u\right] = (D-1)\left[u'-2u\right] =$$

$$= D\left[u'-2u\right] - u' + 2u = u'' - 2u' - u' + 2u$$

$$= u'' - 3u' + 2u$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\boxed{(D-\lambda)}\, t^n e^{\lambda t} = (t^n e^{\lambda t})' - \lambda t^n e^{\lambda t} = \boxed{n t^{n-1} e^{\lambda t}} + t^n \lambda e^{\lambda t} - \lambda t^n e^{\lambda t}$$

$$(D-\lambda)\underbrace{t^n e^{\alpha t}}_{\uparrow} = -\lambda t^n e^{\alpha t} + n t^{n-1} e^{\alpha t} + t^n \alpha e^{\alpha t} =$$

$$= n t^{n-1} e^{\alpha t} + (\alpha-\lambda) t^n e^{\alpha t}$$

$\alpha \neq \lambda$ $\neq 0$

SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$\dot{x} = t x^2$ $\quad x(t)$ è la funzione incognita, t variabile indipendente.

$x \neq 0$ divid. per x^2

($x \equiv 0$ è una soluzione)

$$\frac{\dot{x}}{x^2} = t$$

Integrando fra t_0 e t ambo i membri

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)}\,dt = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\Big|_{x(t_0)}^{x(t)}$$

$x(t) = u$

$\dot{x}(t)\,dt = du$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}}{x^2}\,dt = \int_{t_0}^{t} s\,ds = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$$

$$= -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)}$$