Note Title 12/15/2021

$$\int_0^1 \lg \frac{1}{x}\,dx \equiv \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \lg \frac{1}{x}\,dx$$

$\lg \frac{1}{x} \geq 0$

$$\lg \frac{1}{x} = \lg 1 - \lg x$$

$$\int_c^1 -\lg x\,dx$$

$$\frac{-\lg x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{H}{=} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

ε qualunque

$0 \leq -\lg x \leq \varepsilon \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}\,dx = \underbrace{\int_0^{1}}_{0} + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}\,dx$$

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x}+x^3} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{è integr. in }]0,1]}$$

($\sqrt{x}+x^3 \ge 0$)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}\,dx$$

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x}+x^3} \le \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\text{è integr. in } [1,+\infty[}$$

($\sqrt{x}+x^3 \ge 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx =$$

$$\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4}$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^4}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}$$

$\int_{-1}^{1}$ esiste finito perché $\frac{1}{1+x^4}$ è continua su $[-1,1]$

$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ esiste finito perché $\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4}$ è integrabile su $[1,+\infty[$

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^4}\,dx =$ $(y=-x)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \lg x}\,dx = \int_1^{2} \frac{1}{x^3 \lg x}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3 \lg x}$$

$$\frac{1}{x^3 \lg x} \leq \frac{1}{x^3 \lg 2}$$

è integrabile su $[2, +\infty[$ essendo funzione

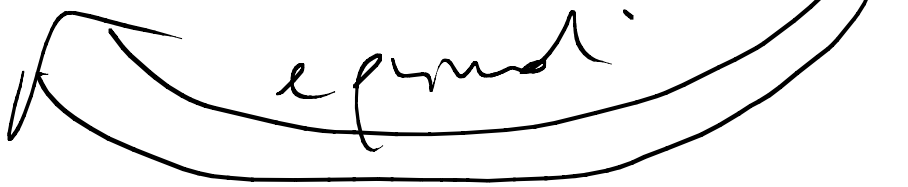
$3 > 1$

$$\frac{x-1}{\lg x} = \frac{x-1}{\lg(1+(x-1))} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$$

$x > 1$

$\frac{1}{\lg x} > 0$ si comporta come $\frac{1}{x-1} > 0$ diverge e quindi anche

$$\frac{1}{x^3 \log x} \geq \frac{1}{2^3 \log x} \to \text{diverge}$$



$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

CONVERGE!

Determinare A, B in modo che

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} - A\sqrt{x+1} - B\sqrt{x-1}\,dx$$ sia integrabile

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F(x) \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}^3$$

$$F(x) = -\frac{Mm}{|x|^2}\,\frac{x}{|x|}$$

- $-$: direzione e verso
- $\frac{Mm}{|x|^2}$: intensità della forza di punto
- $\frac{x}{|x|}$: vettore di norma 1 diretto come x

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$\ddot{x} = -x$$

Così e così sono due soluzioni

Th. L'insieme delle soluzioni di $\sum_0^n a_k x^{(k)} = 0$, $a_k \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), cioè l'insieme delle $x(t)$ reali è uno spazio vettoriale di dim n

$a_n x^{(n)} + \dots + a_3 x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0$

$$\sum_0^n a_k x^{(k)} = 0 \qquad \sum_0^n a_k y^{(k)} = 0$$

(x e y sono due soluzioni)

$$0 = \sum_0^n a_k x^{(k)} + \sum_0^n a_k y^{(k)} =$$

$$= \sum_0^n a_k (x+y)^{(k)} \Longrightarrow$$

$x+y$ è anch'essa soluzione della stessa equazione.

Inoltre

$$0 = \lambda \sum_0^n a_k x^{(k)} = \sum_0^n a_k (\lambda x)^{(k)} \Longrightarrow$$

λx è soluzione anch'essa.

Si dimostra che la dimensione è finita e

$$= n.$$

Nel caso di $\ddot{x} + x = 0$ del II ordine

Tutte le soluzioni di $\ddot{x} + x = 0$ sono

$$\langle \cos t, \sin t \rangle = \{ \alpha \cos t + \beta \sin t \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ (\text{o } \mathbb{R}) \}$$

$$\begin{cases} \alpha \cos t + \beta \sin t \big|_{t=0} = 1 \\ -\alpha \sin t + \beta \cos t \big|_{t=0} = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array}}$$

$$\ddot{x} + x = 0 \qquad x = e^{\lambda t} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2 + 1) e^{\lambda t} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + 1 = 0} \qquad \lambda = \pm i \qquad e^{it}, e^{-it}$$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$$\frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it} = \cos t$$

$$\frac{1}{2i} e^{it} - \frac{1}{2i} e^{-it} = \sin t$$

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$$

$$\langle e^t, e^{2t} \rangle$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$\lambda = 1$
$\lambda = 2$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\boxed{\lambda = 1}$

e^t è una soluzione
$\langle e^t \rangle$ sono soluzioni

Se $\lambda = a$ è una radice di molteplicità μ dell'equazione

$$\sum_{n=0}^{n} a_n \lambda^n = 0$$

equazione caratteristica

polinomio caratteristico.

allora $e^{at}, te^{at}, \dots, t^{\mu-1} e^{at}$

sono tutte soluzioni indipendenti dell'equaz.

nel caso precedente $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$ $\{e^t, te^t\}$ è una base per le soluzioni.

$$(te^t)' = e^t + te^t$$

$$(te^t)' = \left[(1+t)e^t\right]' = e^t + (1+t)e^t$$

$$e^t + e^t + te^t - 2e^t - 2te^t + te^t = 0$$