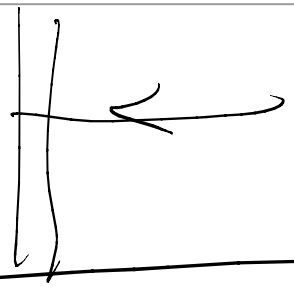
Note Title 12/2/2021

CNS perché f sia integrabile su $[a,b]$

è che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \pi$: $\boxed{\Sigma_\pi - \sigma_\pi < \varepsilon}$



Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ crescente. Allora è integrabile

DIM Fissata una partizione π arbitraria di $[a,b]$

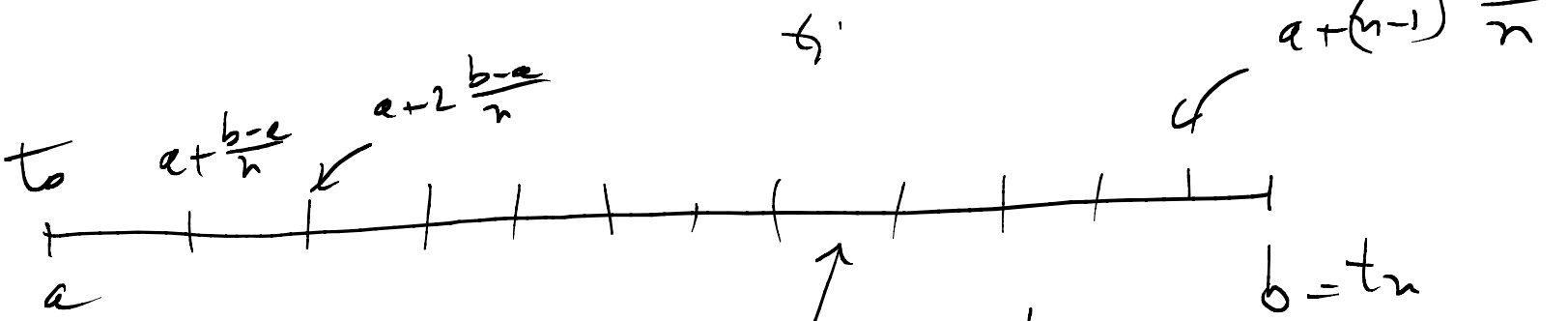
si ha

$$\sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \underbrace{\inf_{[t_i, t_{i+1}]} f}_{\text{minimo di } f \text{ in } [t_i, t_{i+1}]} = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i)$$

$$\Sigma = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_{i+1})$$

π partizione equispaziata

$$\pi = \left\{ a, \dots \dots \underbrace{a + i\frac{b-a}{n}}_{t_i}, \dots, b \right\}$$



ampiezza di ogni intervallo è $\frac{b-a}{n}$

$$\Sigma_\pi - \sigma_\pi = \sum_0^{n-1} \frac{b-a}{n} \left[f(t_{i+1}) - f(t_i) \right] =$$

$\sup f$ su $[t_i, t_{i+1}]$

$t_{i+1} - t_i \quad \forall i = 0 \dots n-1$

$\inf f$ su $[t_i, t_{i+1}]$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \dots + f(t_n) - f(t_{n-1}) \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\to +\infty} \underbrace{\left[f(b) - f(a) \right]}_{\to \text{fin}} \longrightarrow 0$$

$$\frac{b-a}{n}\left[f(b)-f(a)\right] < \varepsilon$$

$$\boxed{n > \frac{b-a}{\varepsilon}\left[f(b)-f(a)\right]}$$

---

f è lipschitziana in $[a,b]$ $\Rightarrow$ integrabile in $[a,b]$

f lipschitziana su $[a,b]$ vuol dire che $\exists\ L>0$:

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]$$

DIM Sia $\Pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$

$$\max_{i=0..n-1} |t_{i+1} - t_i| = \delta \geq 0$$

$$\sigma_\Pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f$$

$\Longleftarrow$ Weierstrass

f è continua su $[a,b]$ $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{L}\right)$

$$\| \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f = f(x_i) = \min_{[t_i, t_{i+1}]} f$$

$$\Sigma_\Pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(y_i)$$

$$\| \max_{[t_i, t_{i+1}]} f$$

$$\Sigma_\Pi - \sigma_\Pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \underbrace{[f(y_i) - f(x_i)]}_{\text{max e min su } [t_i, t_{i+1}]} \leq \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot L\delta =$$

$$= L\delta \sum_{0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = L\delta(b-a) < \varepsilon$$

L fisso; δ lo scelgo io; $(b-a)$ fisso

$$\delta < \frac{\varepsilon}{L(b-a)}$$

---

f continua su $[a,b]$ (chiuso e limitato)

è integrabile

DIM LA STIMA PRECEDENTE di $f(y_i) - f(x_i)$ viene ottenuta dal th. Heine-Cantor. HEINE-CANTOR

"Positività"

Th. Se f è integrabile su $[a,b]$ ed $f \geq 0$ allora $\int_a^b f \geq 0$.

$f \geq 0$ $\quad \sup_{[t_i,t_{i+1}]} f \quad \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f$ sono ≥ 0

$$\sigma_\pi = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f \geq 0$$

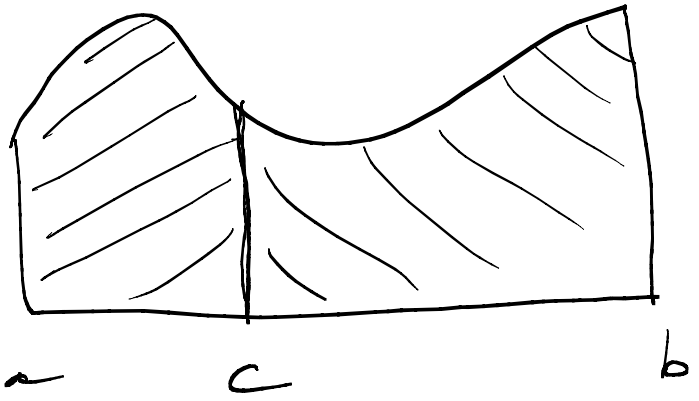
$(t_{i+1} - t_i) \geq 0 \qquad \inf_{[t_i,t_{i+1}]} f \geq 0$

$\sup_\pi \sigma_\pi \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$\int_a^b f$

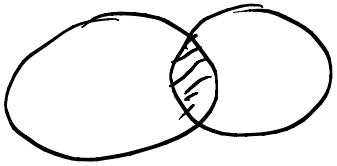
Additività

$\forall c \in]a,b[$



$$\rightarrow \boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$

area della unione (senza intersezioni) è la somma delle aree



$\Pi : \Sigma_{\tau_\Pi} - \sigma_{\tau_\Pi} < \varepsilon$

aggiungendo a τ_Π il punto c $\sum_{[t_i, t_{i+1}] \subseteq [a,c]} + \sum_{[t_j, t_{j+1}] \subseteq [c,b]}$

Teorema della media

(1) Sia f integrabile su $[a,b]$.

Allora $\exists\, \lambda \in \left[\inf_{[a,b]} f,\ \sup_{[a,b]} f\right]$ tale che

$$\int_a^b f = \lambda(b-a)$$

> media di f in $[a,b]$ il numero
>
> $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

$\Pi = \{t_0, t_1\} = \{a, b\}$

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f \le (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

$b > a$

$$\inf_{[a,b]} f \le \underbrace{\frac{\int_a^b f}{b-a}}_{=\lambda} \le \sup_{[a,b]} f$$

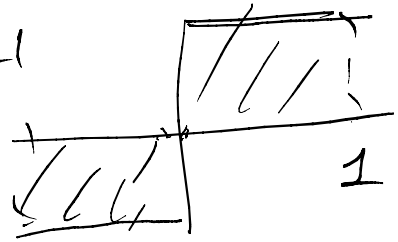
MEDIA (integrale)

(2) Sia f continua su $[a,b]$.

Allora $\exists \xi \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f = f(\xi)$$

DIM Si usa il Th. dei valori intermedi applicato al Th precedente, ed f è definita su un intervallo $[a,b]$



media è 0

$$\begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

discontinua

la media è assunta da $\frac{x}{|x|}$ $x \neq 0$ e 1 $x \neq 0$

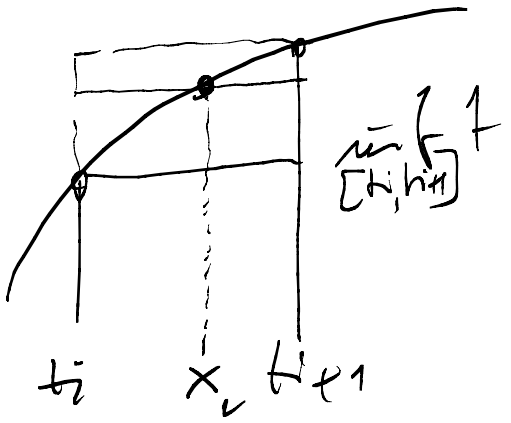
INTEGRALE DI (MENGOLI-) CAUCHY

$$\sigma_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \underbrace{\inf_{[t_i, t_{i+1}]} f}_{f(x_i)}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(x_i)$$

x_i è un punto (a caso) nell'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$

$\sup_{[t_i, t_{i+1}]} f$



$$\sum_{0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f \le \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f$$

$$\| \qquad \le \qquad \le$$

$$\sigma_\Pi \le \int_a^b f \le \Sigma_\Pi$$

$$\left| \int_a^b f - \sum_{0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(x_i) \right| \le \Sigma_\Pi - \sigma_\Pi$$

↑ ↑

Th. $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ (supposte f e g integrabili)

$\int_a^b cf = c \int_a^b f$

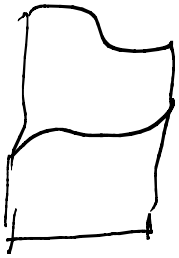
DIM.

$$\underbrace{\sum_0^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,f(x_i)}_{\text{somma di Cauchy per } f} + \underbrace{\sum_0^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,g(x_i)}_{\text{somma di Cauchy per } g} =$$

$$= \underbrace{\sum_0^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,\underbrace{[(f+g)(x_i)]}_{=}}_{\text{somma di Cauchy per } f+g}$$

$$\sum_0^{n-1}(t_{i+1}-t_i)(cf)(x_i) = c\sum_0^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\,f(x_i)$$

$$\approx \int_a^b f$$



$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Th $\boxed{f \le g}$ ed f, g sono integrabili allora

$$0 \le \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f \quad \Rightarrow \quad \int g \ge \int f$$

$(g-f) \ge 0$

$a < b$

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$$

$f \le |f| \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b |f|$

$-f \le |f| \Rightarrow \int_a^b -f \le \int_a^b |f|$

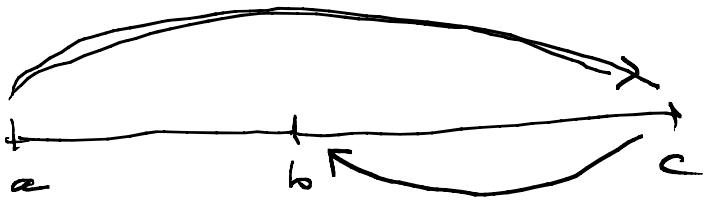
$$-\int_a^b f$$

Se $a < b$ $\int_a^b f$ è quello definito prima

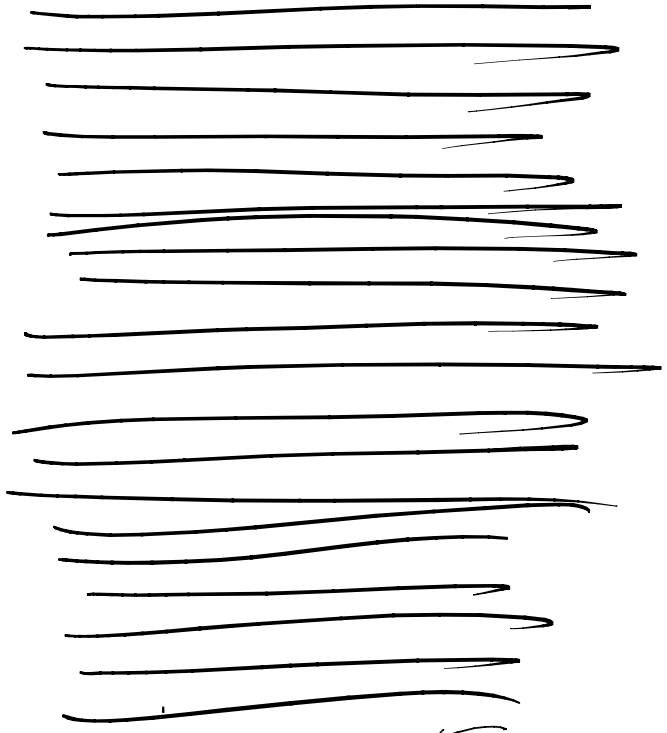
Se $a > b$ $\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f}$

L'integrale così esteso ha la proprietà additiva

seguente $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ è vera anche se $c \notin]a, b[$



Th. Sia f CONTINUA in $[a,b]$. Allora



$\forall x \in]a,b[$

1) La funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile in ogni punto di $]a,b[$ e inoltre $F'(x) \equiv f(x)$

(F è una PRIMITIVA di f su $]a,b[$)

2) se $\boxed{G' \equiv f}$ su $]a,b[$ allora

$$\boxed{G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Th. TORRICELLI

$x \in]a,b[$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left[\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)} - \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{F(x_0)}\right] =$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \overset{\text{Media integrale per funz. continue}}{=\!=\!=} f(\xi) \quad \text{con } \xi \text{ compreso tra } x_0 \text{ e } x$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

f è continua

ξ è compreso tra x_0 e x.

$\Downarrow$ Th. Confronto

$\xi \to x_0$ se $x \to x_0$

DUNQUE F è una primitiva di f

2) Sia G un'altra primitiva. Allora

$$(G-F)' \equiv 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

se segue che $G(x) = F(x) + C$