Note Title 11/30/2021

"Definiz" di raggio di convergenza

$$R = \sup\{|x-x_0| : \sum |a_n(x-x_0)^n| \text{ converge}\}$$

Teor Se $\sum_0^\infty a_n(\bar{x}-x_0)^n$ converge allora

$\sum a_n(x-x_0)^n$ converge assolutamente

se $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$

↑ x che è più vicino ad x_0 di $\bar{x}$.

DIM Poiché $\sum_0^\infty a_n(\bar{x}-x_0)^n$ converge (anche solo semplicemente) allora della condiz. necessaria di convergenza segue

$$a_n(\bar{x}-x_0)^n \longrightarrow 0 \implies$$

la successione $a_n(\bar{x}-x_0)^n$ è limitata e dunque $\exists M>0$:

$$|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \le M$$

ne segue

$$\rightarrow \boxed{|a_n(x-x_0)^n|} = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \boxed{\left|\frac{(x-x_0)}{\bar{x}-x_0}\right|^n} \le$$

$$\leq \left| M \left| \frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0} \right|^n \right.$$

serie geometrica di base in modulo < 1 e quindi convergente

$$\left| \frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0} \right| < 1$$

$\Rightarrow$ convergenza assoluta di $\sum a_n (x-x_0)^n$

DEFINIZIONE FINALE DI RAGGIO DI CONVERGENZA

$$R = \sup \left\{ |x-x_0| : \sum a_n (x-x_0)^n \text{ converge} \right\}$$

Esempio $\sum \frac{x^n}{n}$ $|x_0=0|$ è la che converge

in $x=-1$ ora vale $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (per Leibnitz)

e dunque, per il Lemma precedente,

converge assolutamente $\forall x: |x-0|<1$

CALCOLO PRATICO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA.

$$\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n$$

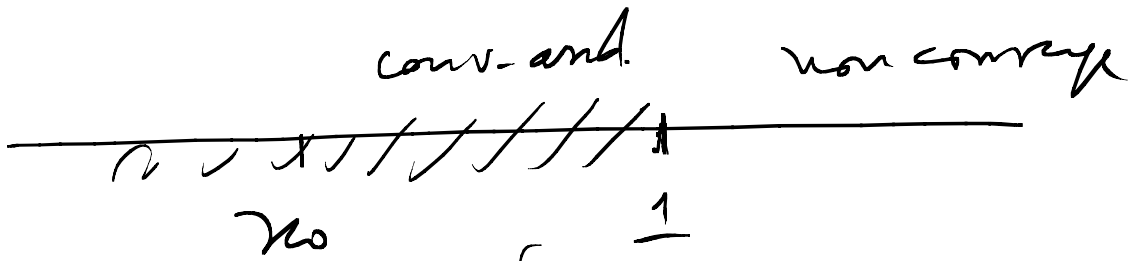
$$\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = \boxed{|x-x_0| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

CRIT. DEL RAPPORTO PER LE SERIE DI POTENZE $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$

allora se $|x-x_0| < \boxed{\frac{1}{L}} \Rightarrow$ $(L>0)$

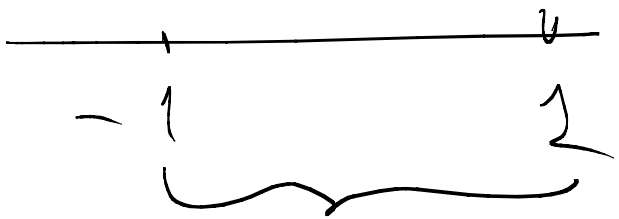
$|x-x_0| \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to M < 1 \Rightarrow$ la serie converge assol.

$|x-x_0| > \dfrac{1}{L}$ la serie dei moduli diverge



$R = \dfrac{1}{L}$

$$\sum \frac{x^n}{n^3}$$



$$a_n = \frac{1}{n^3} \qquad x_0 = 0$$

$$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{n^3 + \text{sch-fezze di grado più basso}} \longrightarrow L = L$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rightarrow \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \boxed{|x-x_0|} \longrightarrow 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Es

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$x_0 = 0 \qquad a_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \downarrow 0$$

SE, INVECE,

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty$$

allora $\rightarrow$

$$\left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \to +\infty$$

> 1

$R = 0 \simeq R = \text{"} \frac{1}{+\infty} \text{"}$

$$\sum a_n (x-x_0)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & L \in \mathbb{R} \quad L \neq 0 \\ +\infty & L = 0 \\ 0 & L = +\infty \end{cases}$$

$$\sum a_n x^n \qquad x_0 = 0$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists k : n = 2^k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + x^{32} + \dots$$

$$\frac{a_4}{a_3} = 0 \quad !!!$$

HADAMARD

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists k : n = 2^k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} 1/L & L \in \mathbb{R} \neq 0 \\ +\infty & L = 0 \\ 0 & L = +\infty \end{cases}$$

L = sup dei limiti delle sottosuccessioni convergenti

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad]x_0 - R, x_0 + R[$$

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots a_n(x-x_0)^n + \dots$$

$$= a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = a_1$$

VERA DENTRO $]x_0 - R, x_0 + R[$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 (x-x_0) + n(n-1)a_n (x-x_0)^{n-2} + \dots$$

$$f'(x_0) = 2a_2$$

$$f''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \dots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n! \, a_n \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

La serie $\sum a_n (x-x_0)^n$ coincide
alla serie di Taylor della sua somma $f(x)$.

$\sum_0^\infty a_n (x-x_0)^n$ con Raggio di convergenza R

$\sum_1^\infty n a_n (x-x_0)^{n-1}$

$$\left| \frac{(n+1) a_{n+1}}{n a_n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right) \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$\to 1$

$\frac{1}{R}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n \qquad \boxed{|x|<1} \qquad R = 1$$

$n \Downarrow n$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{1}^{\infty} n\, x^n$$