Note Title 11/26/2021

$f \in C^{n+1}\,]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ $\forall x\ \exists\ \xi$ interno all'intervallo di estremi x_0 e x
$\in\ ]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$$f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{somma parziale } n\text{-esima della serie}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

tale che

ξ ? x_0 ?

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

SERIE DI TAYLOR

Se $x_0 = 0$ SERIE DI MAC LAURIN

f è una FUNZIONE ANALITICA in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ se, $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ la serie di Taylor di f con centro x_0 converge a $f(x)$.

ESEMPIO Non tutte le funzioni $C^\infty(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$ (continue con tutte le derivate, di ogni ordine, continue) SONO ANALITICHE

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$x_0 = 0 \longrightarrow$ il polinomio di Taylor di ogni ordine è nullo

$\Downarrow$

$$f(x) \neq \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \overset{H}{=} 0$$

ITERARE PER LE ALTRE DERIVATE

$$f(x) - \sum_{0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\xi \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$\to 0$

se si ha che $\sup_{t\in[x_0,x]} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ $\quad$ f è analitica

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[= I \quad |x-x_0| < \delta$$

Modulo del resto della serie di Taylor

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \leq \frac{\sup_{t\in I} |f^{(n+1)}(t)| \; \delta^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

$$R_n(x) = f(x) - \sum_0^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Resto della serie di Taylor

Resto di ordine N della serie $\sum a_n$ è $\sum_1^\infty a_n - \sum_1^N a_n$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$f(x) = \lg(1+x) \qquad x_0 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1 = f'(0)$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = -(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}\Big|_{x=0} = 2$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=0} = -1 = f''(0)$

$f^{(IV)}(x) = 2(-3)(1+x)^{-4} = -6(1+x)^{-4}$

$x=0 \rightarrow \boxed{-6}$

$f^{(IV)}(0)$

$$\rightarrow \boxed{f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!}$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{-6x^4}{6\cdot 4} + \dots$$

$f(0)=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(0)=-2$

$$+ \dots \quad (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Esercizio

$\sqrt{1+x}$

$e^x \sin x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

$$e^x \sin x =$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) =$$

$$= 0 + x + x^2 + \left(-\frac{x^3}{6} \cdot 1 + \frac{x^3}{2}\right) + \cdots$$

$$+ \cdots$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$\sum_0^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$\frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!}|x - x_0|^k$$

$$\frac{\sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)|}{k!} \delta^k \to 0$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1}{1-y}\right)_{y=x^2} = \left(\sum_{0}^{\infty} y^n\right)_{y=x^2} = \boxed{\sum_{0}^{\infty} x^{2n}}$$

$y = x^2$ ↑ ↑ $|y| < 1$

$|x^2| < 1$

$x^2 < 1$

$\boxed{-1 < x < 1}$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \left.\frac{1}{1-y}\right|_{y=-x} = \left(\sum_{0}^{\infty} y^n\right)_{y=-x} =$$

$|y| < 1$

$$= \sum_{6}^{\infty} (-x)^n \qquad \boxed{|x| < 1}$$

SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

nel caso di Taylor

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$a_n \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

x_0 si chiama centro o polo ?

$$R = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x-x_0| : \sum_n |a_n| |x-x_0|^n \text{ convergente} \right\}$$

R raggio di convergenza

Sia $\sum a_n (x-x_0)^n$ una serie di potenze il cui raggio di convergenza è R

Allora
1) Se $R=0$ la serie converge solo in x_0
2) Se R è finito non nullo, allora la serie converge assolutamente in $]x_0-R, x_0+R[$, nulla potendosi dire sul comportamento agli estremi.
3) $R=+\infty$ allora la serie converge su tutto $\mathbb{R}$.

$R = 0 \iff \sup \boxed{\{ |x - x_0| \text{ ove } \sum a_n (x-x_0)^n \text{ converge assolut} \}} = 0$

$= \Omega$

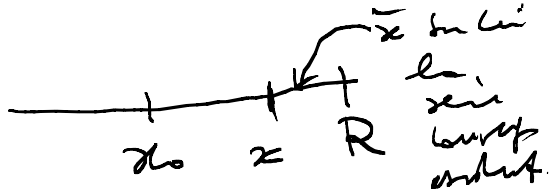
L'unico $x \in$ è x_0

$$\boxed{\sum \underbrace{n!\, x^n}_{\to 0 \text{ solo se } x = 0}}$$

R finito non nullo $\boxed{R > 0}$

Occorre provare che $\sum_{1}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n|$ converge se $\boxed{|x - x_0| < R}$

$|a_n| |x - x_0|^n$



$\boxed{|\bar{x} - x_0| \in \Omega}$

$|x - x_0| < R \Rightarrow$

$\exists\, \bar{x} : \sum |a_n| |\bar{x} - x_0|^n$ converge

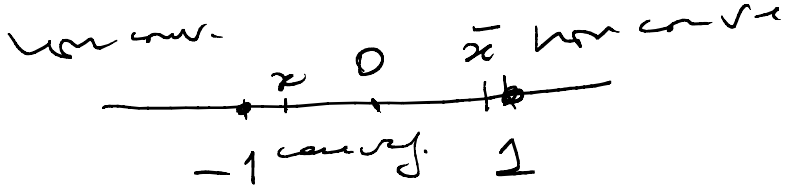
$\to |x - x_0| < |\bar{x} - x_0| < R$

$$\to \underbrace{|a_n||x-x_0|^n}_{\uparrow} \le \underbrace{|a_n||\bar{x}-x_0|^n}_{\text{termine generale di una serie convergente perché } |\bar{x}-x_0| \in \Omega} \leftarrow$$

$\forall x \in]x_0-R, x_0+R[$

th. confronto.

$$\sum_0^\infty x^n$$



$\bar{x} > 0$

$|x| < |\bar{x}| < 1$

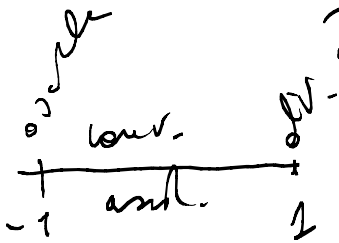
$\bar{x} = \bar{x}$

la serie geom. converg. in $\bar{x}$, assol. perché $\bar{x}^n > 0$

converge in $]-1,1[$

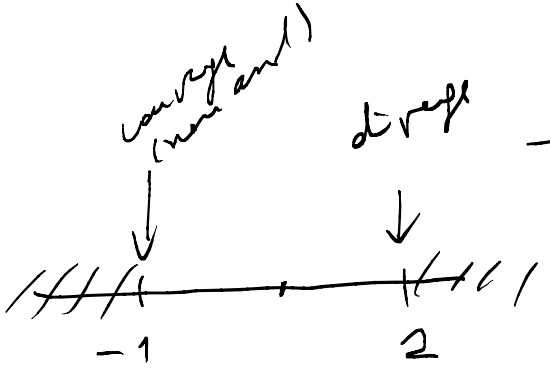
diverge in 1 oscilla in (-1)

non verifica la condizione necessaria se $|x| > 1$



$$R = \sup\left\{|x-0| : \sum_0^\infty x^n \text{ converg. assol.}\right\} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$



$$\frac{x^n}{n} \not\to 0 \quad \text{se } |x| > 1$$

$$R = 1$$

$$\sum \frac{1}{n^2} x^n$$

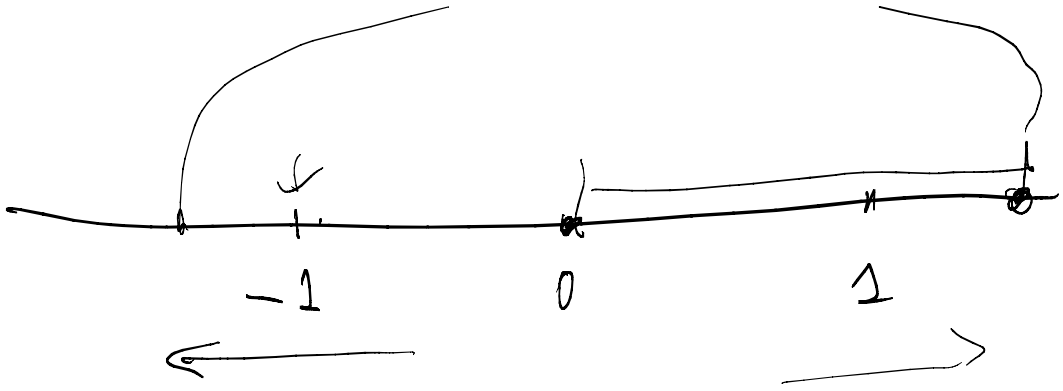
$$\frac{x^n}{n^2} \not\to 0 \quad \text{se } |x| > 1$$

in 1 e -1

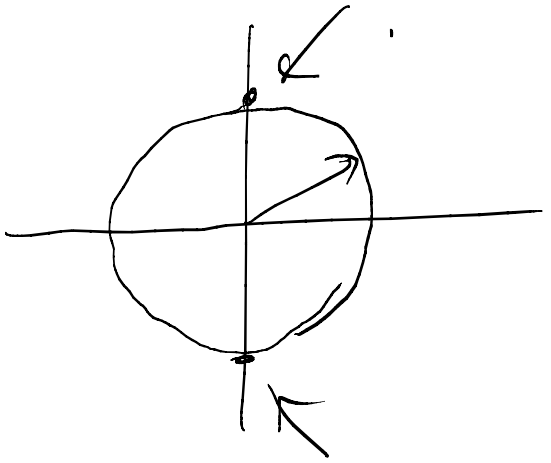
$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

la serie converge assolut. in $x = 1$ e $x = -1$

$\Rightarrow R = 1$



$\ln(1+x)$

$$(-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$