Note Title 11/25/2021

Th. LEIBNITZ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

1) $a_n \geq 0$

2) $\lim_n a_n = 0$

3) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge

$$S_n = \sum_1^n (-1)^k a_k$$ somma parziale di ordine $n$ della serie originale

$$S_{2k+2} = S_{2k} \underbrace{\left( -a_{2k+1} + a_{2k+2} \right)}_{\leq 0} \leq S_{2k}$$

la successione delle somme parziali "pari"

è decrescente.

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} + \underbrace{a_{2k} - a_{2k+1}}_{\geq 0} \geq S_{2k-1}$$

da cui la successione delle somme parziali "dispari" cresce

$$\longrightarrow \quad \boxed{S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k} \geq S_{2k-1}}$$

$$S_{2k-1} \leq S_{2k} \leq S_{2k-2} \leq \dots \leq \boxed{S_2}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

ne segue che $S_2$ è un maggiorante comune a tutti i valori $S_{2k-1}$ $k \in \mathbb{N}$.

Quindi $S_{2k-1}$ converge (crescendo) ad un limite finito $\boxed{S} = \sup_{k \in \mathbb{N}} S_{2k-1}$

Inoltre $k \in \mathbb{N}$ si ha $S_{2k} \geq S_{2k+1} \geq S_{2k-1} \geq \dots \geq \boxed{S_1}$

$S_{2k}$ converge ad un limite finito $\boxed{S'} = \inf_{k \in \mathbb{N}} S_{2k}$

Li bra

$$s_{2k+1} - s_{2k} = \boxed{(-1)^{2k+1} a_{2k+1}} \to 0$$

$k \to \infty$

$$s - s' = 0$$

$$s = s'$$

$\sup s_{2k+1}$
$\inf s_{2k}$

$$s_{2k+1} \le s \le s_{2k+2}$$

$$\boxed{s - s_{2k+1}} \le \underbrace{s_{2k+2} - s_{2k+1}}_{a_{2k+2}}$$

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{1}^{2k+1} (-1)^n \frac{1}{n} \le a_{2k+2} = \frac{1}{2k+2}$$

$$S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$$

$$\Rightarrow |S_{2k} - S| < |S_{2k+1} - S_{2k}|$$

$$|S_{2k} - S| < a_{2k+1}$$

---

Th. Abel $\sum_{1}^{\infty} a_n b_n$

A) 1) $b_n \geq 0$ 2) $b_n \to 0$ 3) $b_n$ decrescente (come in Leibnitz)

B) $\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$ è limitata.

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n b_n$ converge (non necessariamente assolutamente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{\lg n}{n!}} \geq 0$$

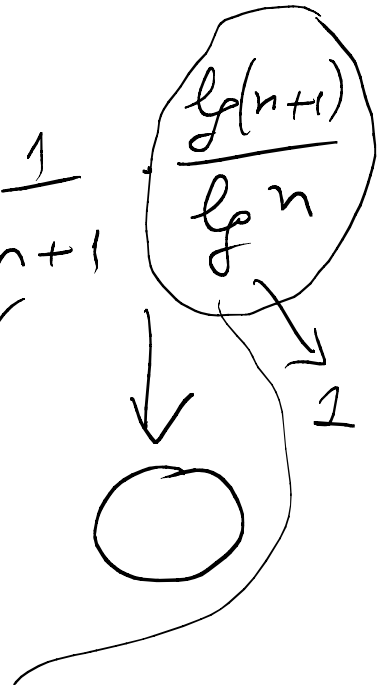
$$\left| (-1)^n \frac{\lg n}{n!} \right| = \frac{\lg n}{n!} \qquad b_n$$

$$\frac{\frac{\lg(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{\lg n}{n!}} \qquad b_{n+1} \quad b_n$$

$$= \frac{\lg(n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\lg n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\lg(n+1)}{\lg n}$$

$\frac{1}{n+1} \to 0$

$\frac{\lg(n+1)}{\lg n} \to 1$



$$\to \lim_{+\infty} \frac{\lg(1+x)}{\lg x} \overset{H}{=} \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lg(n+1) = \lg\left(n\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right) = \lg n + \lg\left(1+\tfrac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{\lg n}{n!}$$ converge assolutamente e quindi anche semplicem.

$$\frac{\lg n}{n!} \geq \frac{\lg(n+1)}{(n+1)!}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$$

$$|a+b| \geq ||a|-|b||$$

$$\left| \frac{(-1)^n n + 1}{n^2} \right| = \frac{|\overbrace{(-1)^n}^{a} n + \overbrace{1}^{b}|}{n^2} \geq \frac{|n-1|}{n^2} =$$

$$= \frac{n-1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$ e dunque la serie di moduli diverge.

$$\lim_n \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

$$\frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n^2-n}{n^2} \to 1$$

$$\sum \frac{(-1)^n n + 1}{n^2}$$

$$\frac{(-1)^n n + 1}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente (converge a 1)

$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente (non assoluta)

$\sum a_n \to S$

$\sum b_n \to S'$

$\sum_1^N (a_n + b_n) = \sum_1^N a_n + \sum_1^N b_n$

$S + S'$

$$\sum_1^\infty 2^{-n} \sin n \frac{\pi}{3}$$

ASSOLUT. CONVERG.

$$\left| 2^{-n} \sin\left(n \frac{\pi}{3}\right) \right| \le 2^{-n}$$

---

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n + \sin n}$$

CONV. ASSOL. ?

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n + \sin n} \right| = \frac{1}{2n + \sin n} \asymp O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{2n + \sin n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n + \sin n} \to \frac{1}{2}$$

la serie NON converge assolutam.

Per la convergenza semplice

$$\frac{(-1)^n}{2n+\sin n} = (-1)^n \underbrace{\frac{1}{2n+\sin n}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$

$a_n \to 0$

Per studiare la decrescenza di $\frac{1}{2n+\sin n}$

considero la funzione $f(x) = \frac{1}{2x+\sin x}$ $\underline{x \geq 1}$

$$f'(x) = \frac{-(2+\cos x) \leq 0}{(2x+\sin x)^2 > 0} \leq 0$$

$\underline{\text{decrescente}}$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ biunivoca

$\begin{cases} a_n \geq 0 \\ \sum a_n \text{ converge} \end{cases}$

$$b_n = a_{\sigma(n)}$$

$$\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty a_n$$

$$\sum_1^N b_n = \sum_1^N a_{\sigma(n)} \leq \sum_{j=1}^{\max\{\sigma(1),\dots,\sigma(N)\}} a_j \leq \sum_1^\infty a_j = S$$

$1$

converge, perché le somme parziali sono limitate (da $S$)

e sia $S'$ la sua somma $\Rightarrow S' \leq S$

Infatti

$$\sum_1^N a_n = \sum_{n=1}^{N} b_{\sigma^{-1}(n)} \leq \sum_1^{\max\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(N)\}} b_n \leq S'$$

$$S = \sup \sum_1^N a_n \leq S' \rightarrow \text{è un maggiorante}$$

la successione $N \nearrow \sum_1^N a_n$

$$S' \leq S$$

$$S \leq S' \Rightarrow \underline{S = S'}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

termini pari $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ diverge

termini dispari $-\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge a $-\infty$

$\geq \frac{1}{n}$

Riordiniamo scegliendo come primi termini solo termini pari sino a che la somma parziale sia $\geq 10$; dopo inseriamo $(-1)a_1$; e riprendo ad aggiungere termini pari sino a che la somma non diventi $\geq 100$; e così via

$$\sum_1^\infty a_n \,, \quad \sum_1^\infty b_n$$

$$\left(\sum_1^\infty a_n\right)\left(\sum_1^\infty b_n\right) = \left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots\right)\left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \dots\right)$$

$$= a_1 b_1 + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) + \left(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1\right) + \dots$$

somma degli indici $= 2$ $\quad = 3$ $\quad = 4$ $\quad \dots$

$$\boxed{c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}}$$

La serie prodotto è def. $\sum c_n$

Se $\sum a_n$ converge ad $S$

$\sum b_n$ converge a $T$

e $\sum c_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum c_n$ converge a $ST$

Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ converge

NON È DETTO che $\sum c_n$ converga

Se una delle due serie converge assolutamente

allora $\sum c_n$ converge ad $ST$

MERTENS

se entrambe le serie sono ass. conv.
allora anche $\sum c_n$ lo è