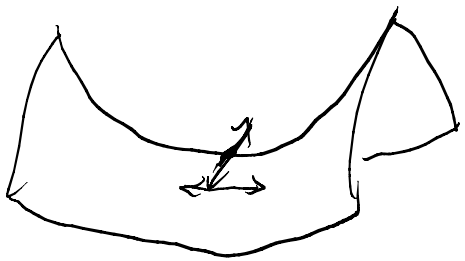
Note Title 11/23/2021

Ricerca di punti critici

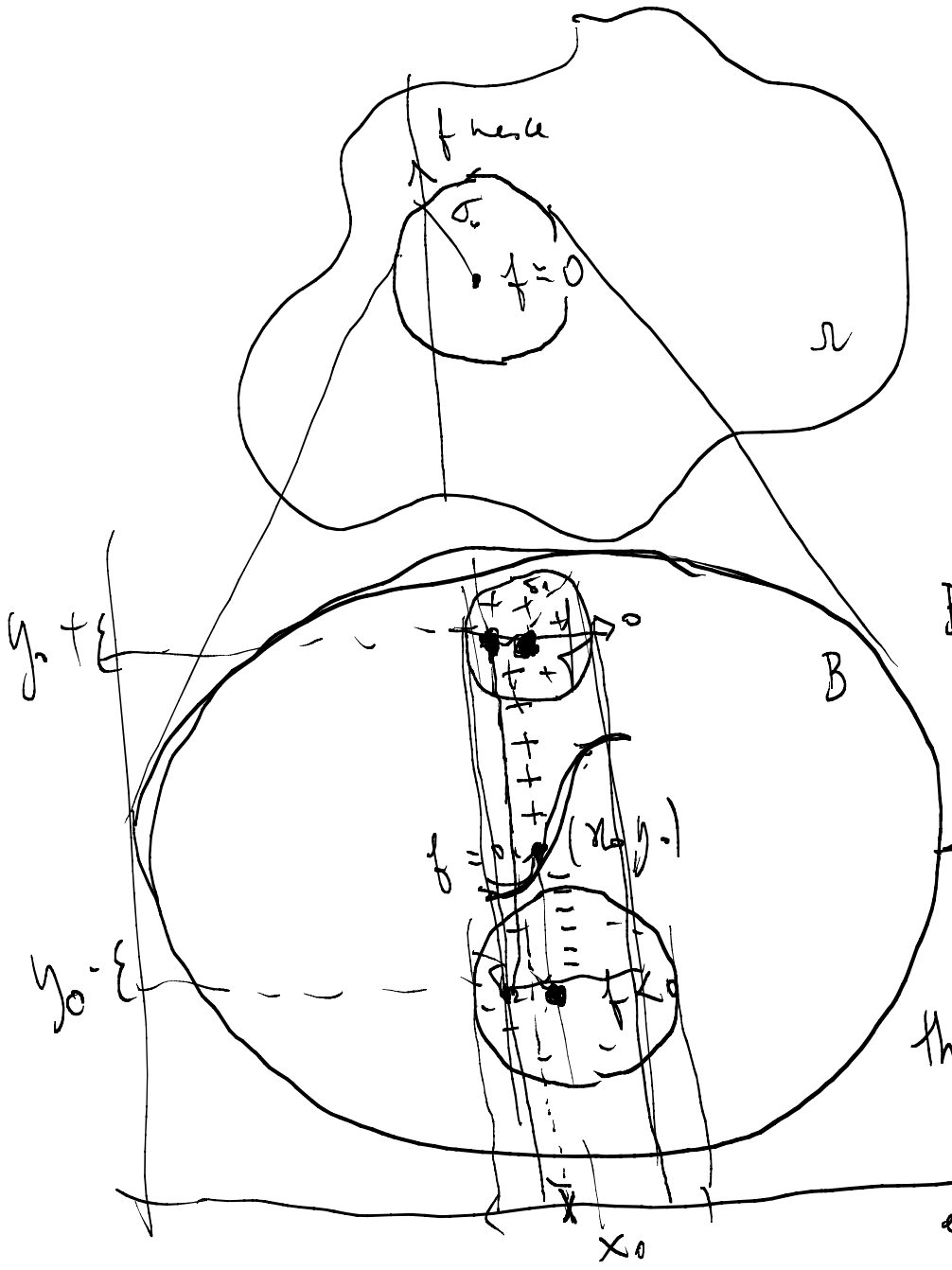
1. $\nabla f(x) = 0$ RISOLVERE per determinare i punti critici

2. Studiare il segno delle $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)$ forme Hessiane.

   - definita ≥ 0 MIN
   - definita ≤ 0 MAX
   - indef. sella
   - semidefinita ?



SELLA



f continua in Ω

$f(x_0, y_0) = 0$

$t \to f(x_0, t)$ è crescente su $(x_0, t) \in \Omega$

$(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$ (punto interno ad Ω)

Strettamente

$B \subseteq \Omega$

TS.

$\exists \delta > 0$ $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

a) $\varphi(x_0) = y_0$

b) $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ su

3) φ è continua

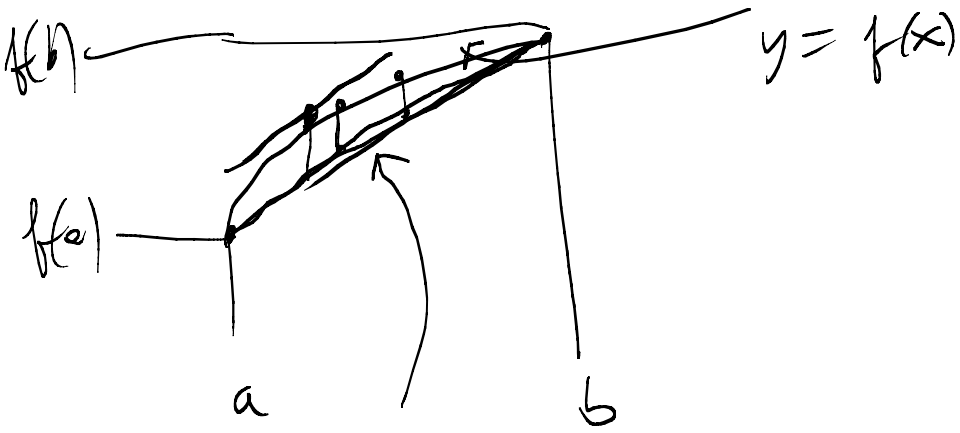
th. fix 1 variabile

$t \to f(\bar{x}, t)$

è all'interno $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$

Lo zero è unico $\bar{x}$ ed è $\varphi(\bar{x})$ = lo zero

Th Lagrange



$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$ retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$ scritta in forma esplicita, così risulta rispetto a y.

$h(a) \neq h(b)$

$$h(a) = f(a) - f(a) + (a-a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

$\exists \xi$ interno ad $[a,b]$ tale che

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

LIMITI AL FINITO

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ (limite finito ($L \in \mathbb{R}$) al finito $x \to x_0$)

(Varianti $\lim_{x \to x_0^+}$ oppure $\lim_{x \to x_0^-}$)

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ } limiti infiniti al finito $x \to x_0$
$= -\infty$ }

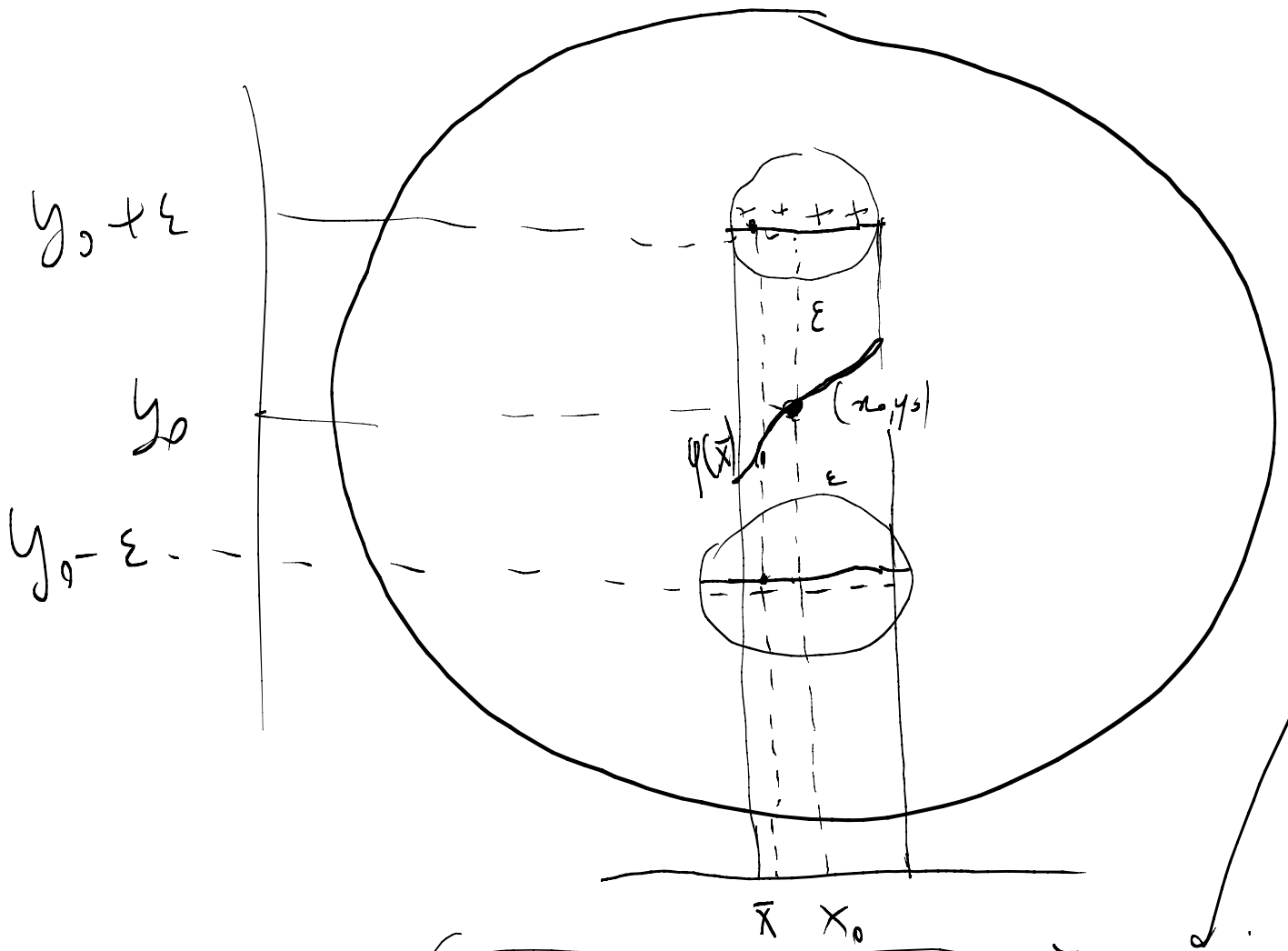
3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ ← limiti finiti a $+\infty$ o a $-\infty$

$\left(\lim_{x \to -\infty}\right) = L \in \mathbb{R}$

4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ← limiti infiniti all'infinito

→ quelli sotto con

$\varepsilon > 0$ dalla continuità



$\varphi(\bar{x}) \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$

$|\varphi(\bar{x}) - y_0| < \varepsilon$

$\varphi(x_0) = y_0$

$f(x_0, y_0) = 0$

δ = il minimo dei due raggi è vera in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

1) $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\exists M: a_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

M è un maggiorante per l'insieme $\{a_n\}$

TS. $\lim_n a_n = \sup\{a_n\}$

1) Poiché $\{a_n\}$ è sup. limitato per l'ip. 2) ne segue che $\sup a_n$ è finito (ed è $\le M$)

Poniamo $L = \sup a_n$

Occorre provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu: \forall n > \nu \ L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

Poiché $L = \sup a_n$ $\forall \varepsilon \ \exists n_0: a_{n_0} > L - \varepsilon$

Da 1) basta scegliere $\nu = n_0$ $\forall n > \nu \ a_n \ge a_\nu > L - \varepsilon$

sempre vera $\forall \varepsilon > 0$ perché $L \ge a_n \ \forall n$ e $L + \varepsilon > L$

$$\sum_1^\infty \left(\sin\sin n\right)^n$$

$\sin n \in [-1,1]$

$(\quad) \in [\sin(-1), \sin 1]$

$|\sin\sin n| \le \sin 1 < 1$

serie in modulo maggiorata dalla serie geometrica $(\sin 1)^n$ che converge perché $\sin 1 < 1$

$$\sum_1^\infty \log\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) \qquad \log\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right) = O\left(-\frac{1}{n^2+1}\right)$$

$$\log\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right) \sim -\frac{1}{n^2+1} \sim -\frac{1}{n^2}$$

$$1-\frac{1}{n^2+1}$$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → diverge

$\frac{1}{n} \to 0$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è contato come $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k}$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$ → $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$

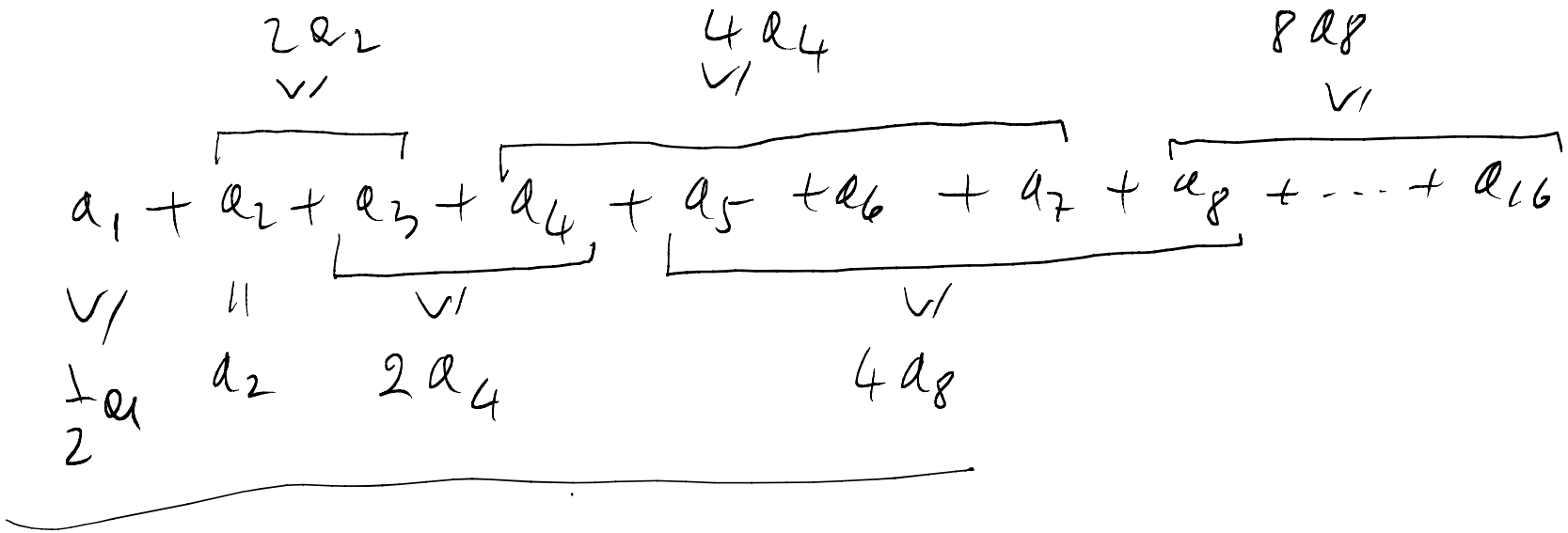
$A = \frac{1}{2}$ $B = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+4} = 1$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$\frac{1}{k(k+2)}$

$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$


2a2
4a4
8a8
a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + a8 + ... + a16
a2
2a4
4a8
1/2 a1