Note Title 11/19/2021

→ CN forte $\sum a_n$ converge è che $\lim a_n = 0$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \qquad a_n = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$$

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha^n$$

$\alpha^n \longrightarrow ?$

$|\alpha| < 1 \quad \alpha^n \to 0$

→ $\alpha = 1 \quad \alpha^n \to 1$

$\alpha = -1 \quad \alpha^n = -1, 1, -1, 1 \ldots$

→ $\alpha > 1 \quad \alpha^n \to +\infty$

$\alpha < -1 \quad \alpha^n$ oscillante

SERIE A TERMINI POSITIVI

$$\sum a_n \qquad a_n \geq 0$$

$$S_{n+1} = \underbrace{a_1 + \dots + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} = S_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} \geq S_n$$

La $\sum a_n$ è a termini positivi allora la successione $S_n = \sum_0^n a_k$ è crescente.

CONSEGUENZE

Se la successione delle somme parziali è limitata.
Cioè, converge al suo sup (e la serie converge)

Se NON è limitata sup, allora la successione delle somme parziali (e quindi la serie) diverge a $+\infty$.

NON CI SONO ALTRI COMPORTAMENTI POSSIBILI.

Th. di confronto fra serie a termini positivi

$\sum a_n \quad \sum b_n \quad 0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) se $\sum_1^\infty b_n$ converge $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ converge

2) se $\sum_1^\infty a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_1^\infty b_n$ diverge

→ 1) $a_n \le b_n \ \forall n \Rightarrow \sum_1^k a_n \le \sum_1^k b_n$ ← è limitata perché converge per ipotesi

$\Downarrow$

$\sum_1^k a_n \le \sum_1^k b_n \le \sum_1^\infty b_n$ anche $\sum_1^k a_n$ è limitata (della stessa costante di $\sum_1^k b_n$)

$\Downarrow$

$\Rightarrow \sum_1^\infty a_n \le \sum_1^\infty b_n$

2) $\sum_{1}^{k} a_n \le \sum_{1}^{k} b_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$ se $\sum_{1}^{\infty} a_n$ diverge (a $+\infty$)

$\sum_{1}^{k} a_n \to +\infty$

$\sum_{1}^{k} b_n \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} b_n = +\infty$

$\Updownarrow$

$\lim_{k} \sum_{1}^{k} b_n = +\infty$

Th. di CONFRONTO per serie a term. positivi

utilizzando il limite

$\sum a_n, \ \sum b_n \quad \boxed{0 < a_n \le b_n} \qquad \lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = L$

1) Se L è finito ed $L \neq 0$ $(a_n = O(b_n))$
$(L > 0)$

$\sum a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum b_n$

Fissato $\bar{\varepsilon} < L$ $\exists \nu : \forall n > \nu$ $\boxed{L - \bar{\varepsilon} < \frac{a_n}{b_n} < L + \bar{\varepsilon}}$

cioè

$$\underbrace{(L - \bar{\varepsilon})}_{>0} b_n < a_n < (L + \bar{\varepsilon}) b_n \quad \forall n > \nu$$

>0 $\quad >0$ $\quad >0$

cioè a_n è controllata da entrambi i lati da multipli di b_n.

2) $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ $\left(a_n = o(b_n) \right)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : \forall n > \nu \quad \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon$

($\frac{a_n}{b_n} > 0$)

$\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

$a_n < \varepsilon b_n$

a) $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge

b) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

$\sum \frac{1}{n^3}$ $\qquad \lim_n \frac{\frac{1}{n^3} = a_n}{\frac{1}{n^2+n} = b_n} = l$ $\qquad \frac{n^2+n}{n^3} = 0$

$\sum b_n$ = la serie di Mengoli, converge

da b) segue che $\sum \frac{1}{n^3}$ converge

---

fa una prova a confronto alla serie geometrica

$$\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{n^3} \to +\infty$$

?

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = 1$$

$$\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2+n}\right)$$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge (par confront con Mayor)

$\sum \frac{1}{n^3}$ converge ↗

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(diverge, diverge)

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \boxed{\sqrt{n} \to +\infty}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

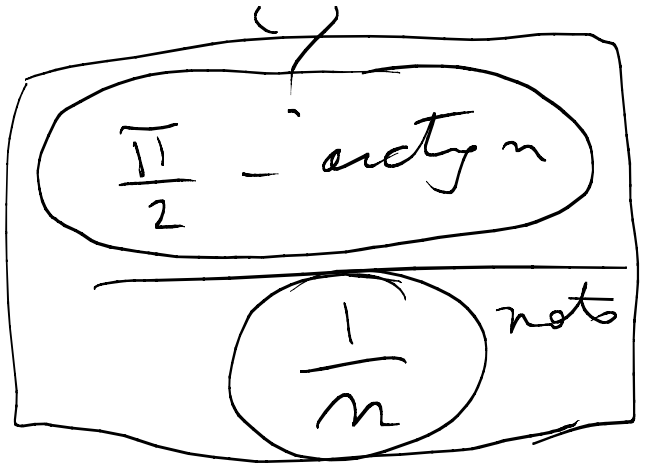
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu : \forall n > \nu$$

$$\frac{a_n}{b_n} > \varepsilon \iff a_n > \varepsilon b_n$$

se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

se $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$$



$$\boxed{\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n}{\frac{1}{n}}} \quad \text{noto} \quad \sim \quad \mathcal{H}$$

$$\frac{-\frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$$

la serie diverge $\Longleftarrow$

perché $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\sum \underbrace{\lg\left(\cos\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ O\left(\frac{1}{n^2}\right)}}$$

serie a termini NEGATIVI

$$\frac{\lg\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\lg(\cos t) = \lg(1+(\cos t-1))$$

CRITERIO DEL RAPPORTO (d'Alembert)
o DELLA RADICE (CAUCHY)

$\sum a_n \quad a_n \geq 0 \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ finito

Allora
- $L < 1$ $\sum a_n$ converge
- $L > 1$ $\sum a_n$ diverge

}

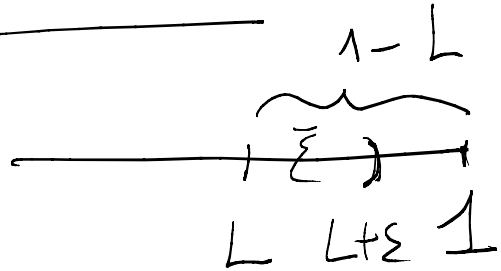
- $L = 1$ (accidenti a lui!) la $\sum a_n$ fa quello che gli pare!

$\sum \frac{1}{n} \quad a_{n+1} \; \frac{1}{n+1}$

$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ $\quad a_n \; \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n^2} \qquad \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$

$L < 1$ $\quad \bar{\varepsilon} < 1 - L \quad \exists \nu :$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \bar{\varepsilon} \qquad \forall n \geq \nu$$

$$a_{n+1} < (L+\bar{\varepsilon})\, a_n < (L+\bar{\varepsilon})^2 a_{n-1} < \cdots < \underbrace{(L+\bar{\varepsilon})^{n-\nu}}_{\text{costante}} a_\nu$$

$$\sum a_n \qquad \underbrace{(L+\bar{\varepsilon})^{n-\nu}}_{<1}$$

, quindi la serie geom. è convergente

$L > 1 \qquad \bar{\varepsilon} < L - 1 \Rightarrow L - \bar{\varepsilon} > 1$

$$a_{n+1} > (L-\bar{\varepsilon})\, a_n > (L-\bar{\varepsilon})^2 a_{n-1} > \dots > \underbrace{(L-\bar{\varepsilon})^{n-\nu}}_{>1} a_\nu$$

$\sum a_n \qquad a \geq 0 \qquad \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$

$$\left.\begin{aligned} \lim_n \sqrt[n]{\tfrac{1}{n}} &= 1 \\ \lim_n \sqrt[n]{\tfrac{1}{n^2}} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$L < 1$ conv.

$L > 1$ div.

$L<1 \quad \varepsilon < 1-L$

$$L-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon < 1 \qquad a_n < (L+\varepsilon)^n \qquad n>0$$

$$\sum \frac{1}{n^p} \qquad p>0$$ ARMONICA GENERALIZZATA

CONVERGE

α $p>1$

DIVERGE

$p \leq 1$

$$\frac{1}{n \lg^p n}$$

$$\sum \underbrace{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}_{\sim \frac{1}{n^3}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}_{\frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{1}{6}$$

$$t - \sin t = O(t^3)$$

Def. Data una serie a termini $\sum a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se la serie $\boxed{\sum |a_n| \text{ converge}}$.

Th se $\sum a_n$ è assol. conv. allora è convergente.

(IL VICEVERSA E' FALSO)

Dim. $m > n$

$$\left| \sum_1^m a_k - \sum_1^n a_k \right| = \left| \sum_{n+1}^m a_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n+1}^m |a_k| = \sum_1^m |a_k| - \sum_1^n |a_k| = \left| \sum_1^m |a_k| - \sum_1^n |a_k| \right| < \varepsilon$$

$\geq$

Condizione $\forall n, m > \nu$ di Cauchy per la serie $\sum |a_n|$ che è convergente per ipotesi