

Th e numero e è irrazionale

DIM. (Per assurdo) $e = \frac{p}{q}$

$$n > q$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \quad \xi \in]0, 1[$$

$$\frac{p}{q}$$

moltiplicando entrambi per $n!$

$$n! \cdot \frac{p}{q} = n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) + n! \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

$\in \mathbb{N}$

$$n! \cdot \frac{t}{e} - n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{e^{st}}{n+1} \quad t \in]0, 1[$$

$\in \mathbb{N}$

$$\frac{e^{st}}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

$$\sin 0.1 \qquad x_0 = 0 \qquad f(x) = \sin x \qquad x = 0.1$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$x \rightarrow x_0$

$$\ln 0.1 = \frac{1}{1!} 1^{\overbrace{(0.1-0)}^{\infty}} + \frac{1}{3!} (-1) (0.1)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(0.1)^n + \dots$$

$$\dots \rightarrow \text{il resto} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (0,1)^{n+1}$$

ove $f^{(n+1)}(\xi)$ sono $\rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi - \xi^2 + \xi^3 - \dots$

tutte limitate in modulo da 1

$\xi \in]0, 0.1[$

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$$

$$\left| R_{n+1}(0,1) \right| \leq \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

resto di Taylor

Basta scegliere n in modo da avere

$$\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < \begin{array}{l} \text{Errore massimo} \\ \text{richiesto nell'approssimazione} \end{array}$$

per 6 cifre decimali

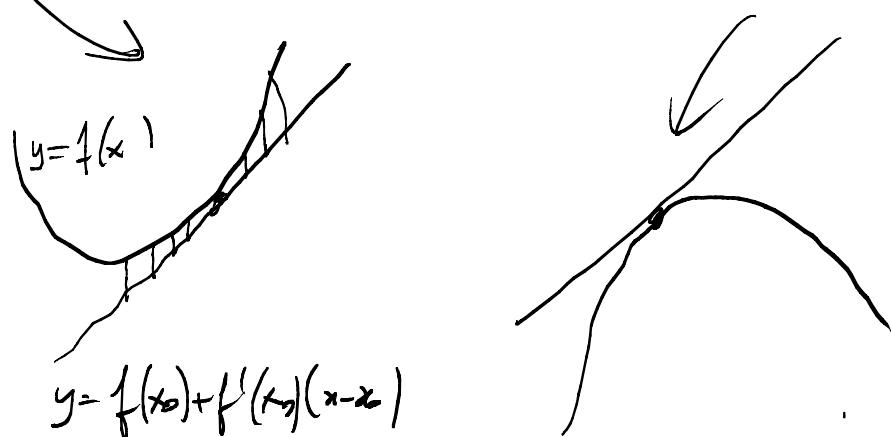
$$\frac{(10)^{-n-1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

CONVESSITÀ CONCAVITÀ

$$\underline{f \in C^2([a,b])}$$

Baylor/Lagrange con $n=1$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2!} f''(\xi) (x-x_0)^2$$



ξ interno
all'interno di
estremi $x_0 + x$

Portando il polinomio di Taylor a I membri

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = \frac{1}{2} f''(\xi) (x-x_0)^2$$

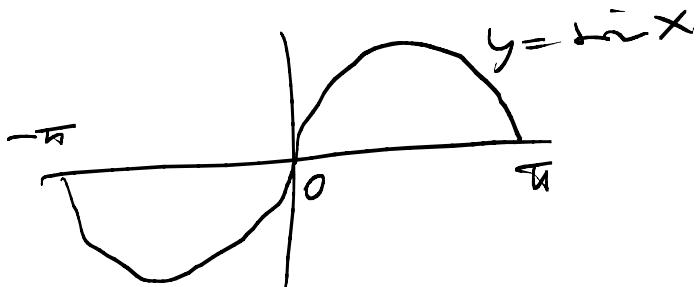
$f''(x) \geq 0$ in un intervallo

f è CONVessa (sopra gli una tangente)

$f''(x) \leq 0$ in un intervallo

f è CONCAVA (sotto - gli una tangente)

$\sin x$



concave fra $0 < x < \pi$
convex fra $-\pi < x < 0$

$$f(x) = \sin x \quad f''(x) = -\sin x$$

SERIE (NUMERICHE)

a_n successione di numeri reali

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n$$

$n = 1 \dots n$

SUMME PARZIALI DELLA SERIE

Si definisce serie numerica, e' l'indice del sommatoria

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Una serie si dice CONVERGENTE ad L

se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = L$

DIVERGENTE

se tel è la successione s_n
OSCILLANTE

se tel è la success. s_n

$$d_n = (-1)^n$$

$$\underbrace{-1}_{\alpha_1} \underbrace{+1}_{\alpha_2} \underbrace{-1}_{\alpha_3} \underbrace{+1}_{\alpha_4} \dots$$

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{-1 + 1} = 0$$

$$S_3 = \underbrace{0 - 1}_{\alpha_3} = -1$$

$$S_4 = -1 + 1 \underbrace{}_{\alpha_4}$$

-1, 0, -1, 0, -1, 0, ...

OSCILLA!

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + d_{n+1}}$$
$$S_1 = \alpha_1$$

$$a_n = 2^n \quad n=0$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3$$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n\right)(1 - \alpha) = 1^{n+1} - \alpha^{n+1}$$

$$\sum_0^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = \boxed{\frac{1}{1 - \alpha}} - \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad \square$$

$\boxed{|\alpha| < 1} \Rightarrow \alpha^n \rightarrow 0$ salvo quanto

$|\alpha| > 1 \quad \alpha > 1 \quad \sum_0^\infty \alpha^k = +\infty$

$|\alpha| < 1 \quad \alpha < -1$ OSCILLA

$$\sum_0^\infty \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}$$

CONVERG.

$$\alpha = 1$$

$$S_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \rightarrow +\infty$$

SERIE GEOMETRICA

SERIE DI MENGOLI (SERIE TELESCOPICA)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}$$

CN perché $\sum_1^\infty a_n$ converge è che $\lim_n a_n = 0$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{\substack{\rightarrow L \\ \rightarrow L}} 0$$

Se \sum converge allora $\lim_n S_n = L$

$$\lim_n S_{n-1} = L$$

Ese.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}$$

n termini

$$S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} >$$
$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$