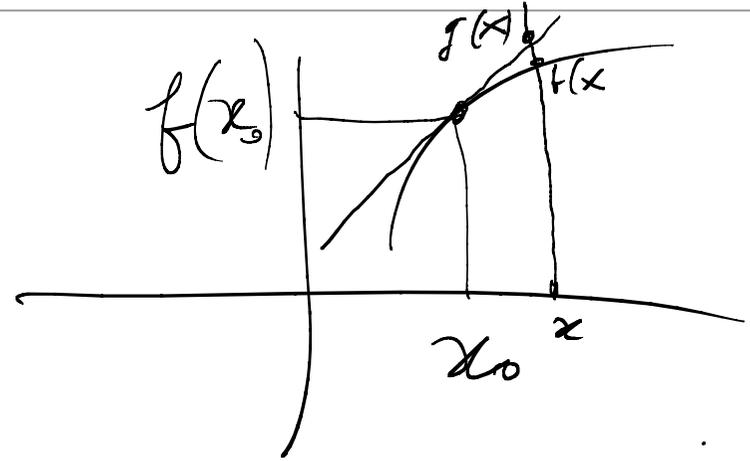


$$y = f(x) \quad (x_0, f(x_0))$$

$$y = \boxed{m(x-x_0)} + f(x_0)$$

$g(x)$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = f'(x_0) - m = \begin{cases} 0 & \text{if } m = f'(x_0) \\ \neq 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\exists f'(x_0)$

per $m = f'(x_0)$

$$f(x) - g(x) = o(x - x_0)$$

$m \neq f'(x_0)$

$$f(x) - g(x) = O(x - x_0)$$

$f(x)$ su derivata in $]a, b[$

Se $f'(x)$ esiste in $]a, b[$ ed è, a sua volta,
derivabile, si pone

$$f''(x) = (f'(x))'(x)$$

$$D^{(0)} f = f$$

$$D^{(n+1)} f = D(D^{(n)} f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sin x)' = \cos x \\ (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x \end{array} \right.$$

Formula di Taylor (con resto di Peano)

$f \in C^n]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0$$

C^n insieme delle funzioni continue e insieme a tutte le loro derivate fino all'ordine n

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{\text{POLINOMIO DI TAYLOR}} + \underbrace{O(x-x_0)^n}_{\text{RESTO DI PEANO}}$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k$$

$$x_0 = 0 \quad (\text{McLaurin}) \quad f(x) = e^x \quad n = 3$$

$$f(x_0) = e^0 = 1 \quad f'(x_0) = 1 \quad f''(x_0) = 1 \quad f'''(x_0) = 1$$

Polinomio di Taylor (di grado 3) è

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 =$$

$$f(x) = e^x$$

$x_0 = 0$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Polinomio di Taylor di grado 3.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 - \dots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) k \cdot (x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \frac{0}{x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{\overbrace{k-1}^{n-1}}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \dots$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = 0$$

$$\left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \right]' = \frac{n}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} = \frac{n!}{n!(n-1)\dots 2 \cdot 1} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}$$

C.S. fu massimo e minimo locale interno

$$\text{C.S. } \boxed{f'(x_0) = 0} \quad \text{e} \quad \frac{f''(x_0) > 0}{f''(x_0) < 0} \Rightarrow x_0 \text{ è } \overset{\text{di}}{\text{minimo}}$$
$$\frac{f''(x_0) < 0}{f''(x_0) < 0} \Rightarrow x_0 \text{ è } \text{di massimo}$$

Dim.

$$\underline{f(x)} = \underline{f(x_0)} + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$$

$\epsilon = \delta$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2 =$$
$$= (x-x_0)^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\quad \right] = \frac{f''(x_0)}{2} \quad \text{che ha lo stesso} \\ \text{segno di } f''(x_0) \\ \text{ed } \neq 0$$

\Rightarrow Per il th. della perm. del segno

$\left[\quad \right]$ ha lo stesso segno di $f''(x_0)$

Perché $(x-x_0)^2 \geq 0$ ed $\neq 0$ per $x \neq x_0$ ha segno
che il segno di $f(x) - f(x_0)$ è lo stesso di
 $f''(x_0)$ per $x \neq x_0$ (e $f(x) - f(x_0) = 0$ se $x = x_0$)

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = \underline{x^4}$$

$$(x^3)' = 3x^2 \text{ verifica in } 0 \text{ la cond. di Fermat}$$

$$(x^3)'' = 6x \text{ che è } 0 \text{ in } 0$$

$$f''(0) = 0$$

$$\text{Se } \underline{f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0}$$

Fermat

$$f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) (x-x_0)^{k+1} + o(x-x_0)^{k+1} =$$

$$= \boxed{(x-x_0)^{k+1}} \left[\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} + \frac{o(x-x_0)^{k+1}}{(x-x_0)^{k+1}} \right]$$

