Note Title 11/10/2021

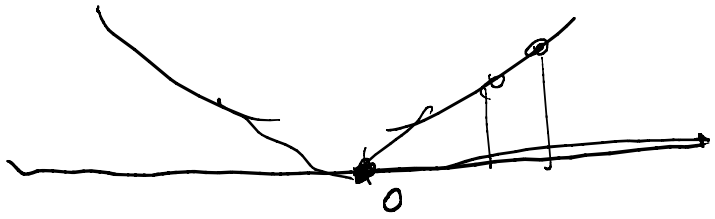
Se $f'(x) \geq 0$ su un INTERVALLO allora f è crescente

$f(x) = |x|$

0 è di minimo

$|x| \geq 0 \qquad |0| = 0 \Longrightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{NON ESISTE} & \text{in } 0 \end{cases}$$



f è CRESCENTE (strett.) su $]0, +\infty[$

f è DECRESC. (strett.) su $]-\infty, 0[$

Applicando Lagrange ad f su $[0, +\infty[$

f è continua su $[0, +\infty[$

è derivabile su $]0, +\infty[$

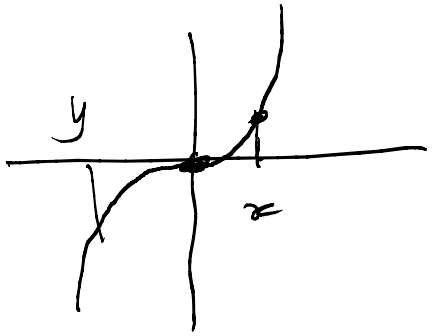
$f' \geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) > 0$

$x > 0$

$f(x) > f(0)$

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2 = 0$ se solo se $x = 0$

$f'(x) \geq 0$



$f(x) \geq f(0)$

$f(y) \leq f(0)$

$f(x) = x^2$ $\quad$ $\underline{\mathrm{Im}\, f\ ?}$

<u>Th.</u> valori intermedi

f continua in $[a,b]$

$\forall x_1, x_2$ $\forall \lambda$ strett. compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

$\exists\, x^* : f(x^*) = \lambda$

Th. valori intermedi "rinforzato" $\quad \mathrm{Im}\, f \supseteq \left]\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\right[$

HP f continua in $[a,b] = A$

<u>TS</u> f assume tutti i valori strett. compresi fra $\inf_A f$ e $\sup_A f$

f crescente su un intervallo I

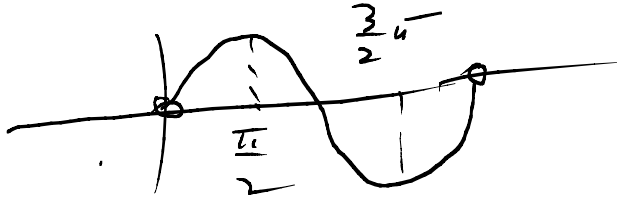
allora $\operatorname{Im} f = \left] \inf_I f , \sup_I f \right[$

$f(x) = x$ su $]0,1[$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f = \left] \inf_{]0,1[} f , \sup_{]0,1[} f \right[$

$\rightarrow$ $f(x) = \sin x$ su $]0,\pi[$ se vale $\underline{\text{O}}$ ($\inf_{]0,\pi[} f$

$\sup_{]0,\pi[} f$ è assunto in $\frac{\pi}{2}$ (punto di max)

$f(x) = \sin x$ su $]0,2\pi[$



Th. CAUCHY f, g continue in $[a,b]$, derivabili in $]a,b[$, $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[$

Th $\exists\, \xi \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lambda f(x) + \mu g(x)} = h(x) \qquad h(a) = h(b)$$

Per usare Rolle ci vuole

$$\lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda f(b) + \mu g(b)$$

$$\lambda\big(f(b)-f(a)\big)+\mu\big(g(b)-g(a)\big)=0$$

$$\lambda = g(b)-g(a)$$

$$\mu = -\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$\overbrace{\big(g(b)-g(a)\big)}^{\lambda} f(x) - \overbrace{\big(f(b)-f(a)\big)}^{\mu} g(x) = h(x)$$

per Rolle, applicato ad h, $\exists\, \xi \in]a,b[$ tale che $h'(\xi)=0$

$$\big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi) - \big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi) = 0$$

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Se fosse $g(a) = g(b)$, per Rolle $\exists k \in]a,b[$ tale che $g'(k) = 0$ NON COMPATIBILE CON $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

Dividendo per $g'(\xi)(g(b) - g(a))$ segue tesi.

$f(x_0) = 0$

$g(x_0) = 0$

f, g continue e derivabili

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$g'(x_0) \neq 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{x \neq x_0}{=} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$\downarrow$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$