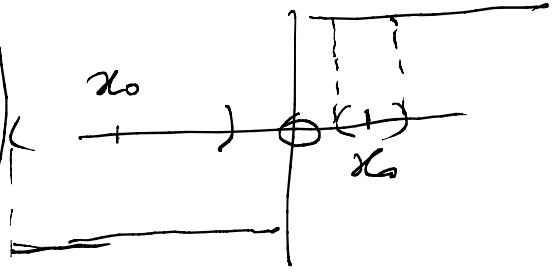
Note Title 11/9/2021

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \quad \text{dom} f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

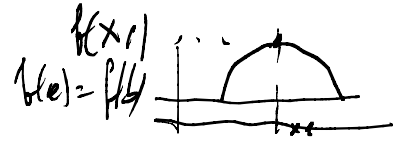
$$\boxed{f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{dom} f}$$



Th 1) f continua su $[a,b]$
2) f derivabile su $]a,b[$
$\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in]a,b[$ $f'(\xi) = 0$

$\rightarrow$ 3) $f(a) = f(b)$

DIM Per Weierstrass (MAX e MIN) $\exists$ x_1 di massimo e uno x_2 di minimo



Se uno dei due (x_1 e x_2) è interno allora per il Th. Fermat

la derivata in esso si annulla e la tesi è ottenuta

Se i punti di max e min sono agli estremi allora il valore max coincide con il minimo (es 3).

$$f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \Longrightarrow f \text{ è costante in } [a,b]$$

sono uguali

Allora ogni punto interno verifica $f' = 0$.

f derivabile in $]a,b[$

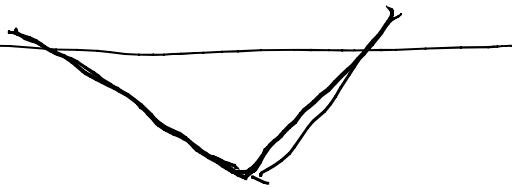
$f(a) = f(b)$

No

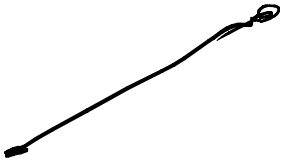
f continua in $]a,b[$

$f(a) = f(b)$

$f(a)=f(b)$



$f(x) = x$ on $[0,1]$



Th di Lagrange o del valor medio

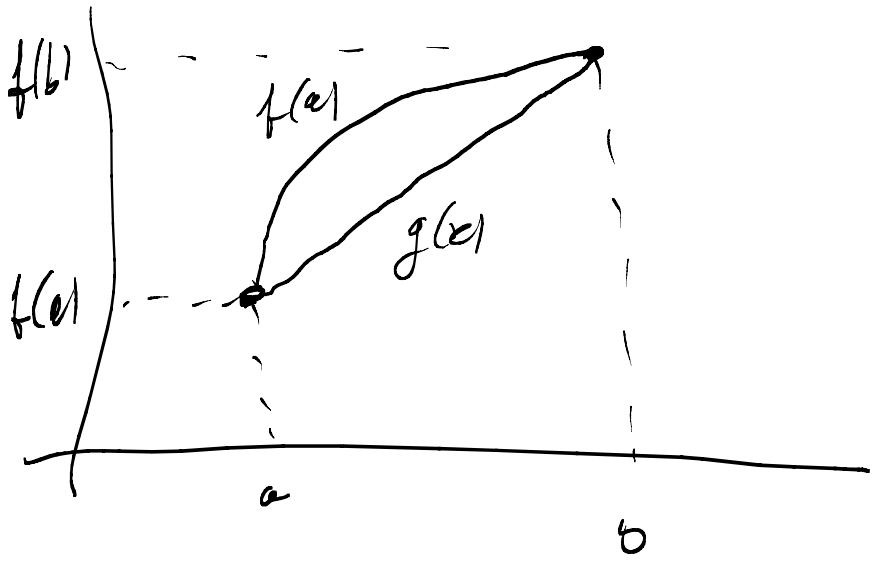
f continua su $[a,b]$

f derivabile in $]a,b[$

$\Rightarrow \exists \xi \in]a,b[$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leftarrow$$

$$[\, f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \,]$$



$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\begin{cases} g(a) = f(a) \\ g(b) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) \end{cases}$$

$h(x) = f(x) - g(x)$

1) h è continua su $[a,b]$ perché $f(x)$ lo è per ipotesi e g è continua dell'enunciato

2) h è derivabile su $]a,b[$ perché f lo è per ipotesi e g è derivabile dell'enunciato (con derivata $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

3) $h(a) = h(b)$

$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \qquad h(b) = f(b) - g(b) = 0$

Tutte le ipotesi di Rolle sono verificate in quanto

$$\exists\, \xi \in]a,b[\;:\; h'(\xi) = 0$$

$$\| $$

$$f'(\xi) - g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\blacksquare$

---

f è costante in $[a,b]$ allora $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in [a,b]$

f è crescente in $[a,b]$ allora $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$

VERA

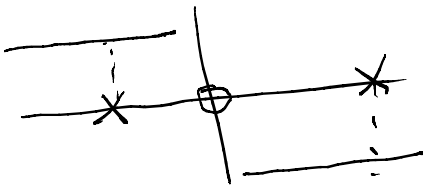
$f: A \to \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA (lipsiziana)

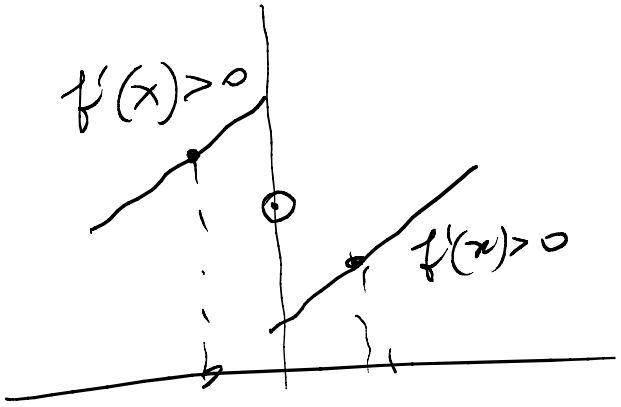
se $\exists\, L \geq 0 \;:\; \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq L \;\; \forall x,y \in \text{dom} f$

Se f è lipschitziana di costante L ed è derivabile in x_0 allora $|f'(x_0)| \le L$.

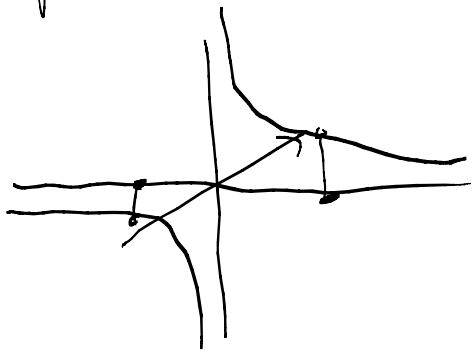
I teoremi opposti sono (tutti) FALSI!

Per esempio $f(x) = -\frac{x}{|x|}$



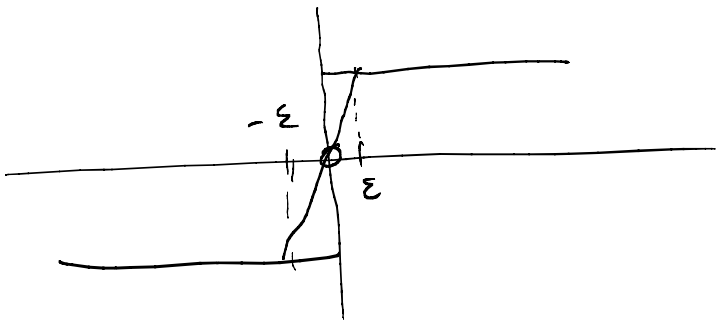


$f(x) = \frac{1}{x}$ def. $\forall\, x \neq 0$



$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\frac{x}{|x|}$$



$$x = \frac{1}{n}$$

$$y = -\frac{1}{n}$$

$$\frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right|}{\left| \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) \right|} =$$

$$= \frac{1 - (-1)}{\frac{2}{n}} = \frac{2}{2}\, n =$$

① Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[\Longrightarrow f$ è costante in $]a,b[$

↑ INTERVALLO

Scelti ad arbitrio $x, y \in]a,b[$ si applica Lagrange ad f in $[x,y]$, ottenendo $\xi \in]x,y[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[\implies f$ è crescente

INTERVALLO

Si deve provare che $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ che equivale

(per $x \neq y$) $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$

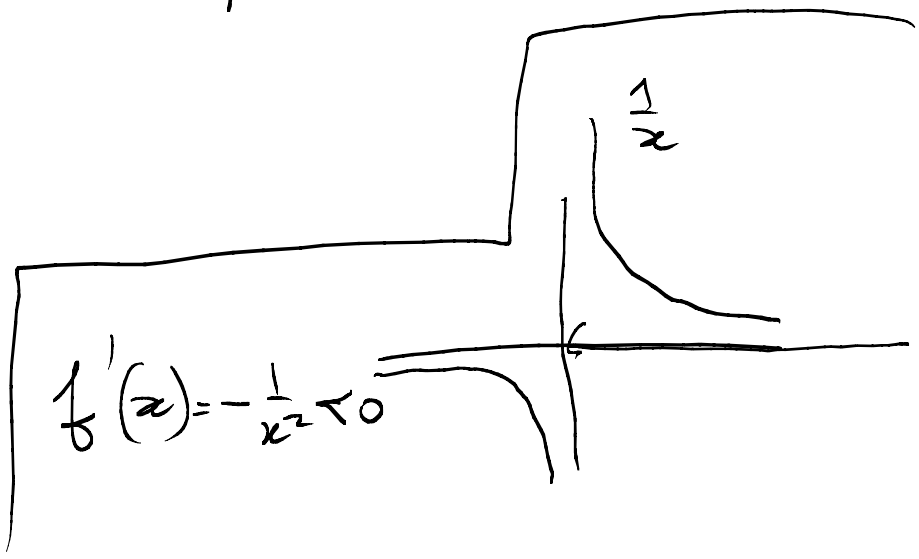
Fissati $x \neq y$ per Lagrange $\exists \xi$ interno ad $[x,y]$ tale che

$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) \geq 0$

Sia f derivabile in $]a,b[$ e sia $|f'(x)| \le L \quad \forall x \in]a,b[$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \le L \quad \forall x,y \in]a,b[$$

Dim

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(\xi)| \le L$$

Lagrange
$\exists \xi$ interno ad $[x,y]$