Note Title 10/6/2021

$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha = \max A$

$$\begin{cases} \alpha \in A \\ \alpha \geq a \quad \forall a \in A \end{cases}$$

$\alpha = \min A$

$$\begin{cases} \alpha \in A \\ \alpha \leq a \quad \forall a \in A \end{cases}$$

- α maggiorante di (fin) A se $\forall a \in A \quad a \leq \alpha$
- α minorante di (fin) A se $\forall a \in A \quad \alpha \leq a$

A è limitata superiormente se $\exists \alpha : \alpha \geq a \ \forall a \in A$
(se possiede maggioranti)

inferiormente se $\exists \alpha : \alpha \leq a \ \forall a \in A$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente

Allora $\Lambda \in \mathbb{R}$ sarà detto estremo superiore di A se è il minimo dei suoi maggioranti, cioè se

$\Lambda = \sup A$ →

1) $a \leq \Lambda \quad \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A \quad \bar{a} > \Lambda - \varepsilon$

$\Lambda - \varepsilon$ non è un maggiorante per A

Se A è limitato inferiormente allora $\lambda \in \mathbb{R}$ si dirà estremo inferiore di A se è il massimo dei minoranti, e cioè se verifica

$\lambda = \inf A$

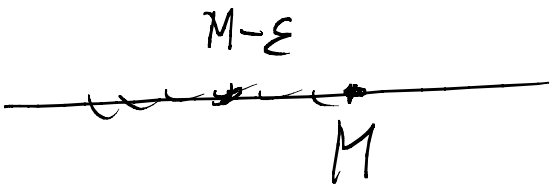
1) $\lambda \leq a \quad \forall a \in A$ 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A \quad \bar{a} < \lambda + \varepsilon$

Se $M = \max A$ $\Longrightarrow$ $M = \sup A$

HP $\Leftrightarrow$ vale che TS $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} M \in A \\ M \geq a \quad \forall a \in A \end{cases}$ $\Longleftarrow$ 1) $M \geq a \quad \forall a \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > M - \varepsilon$



$\bar{a} = M$

$\sup [0,1[$ $\qquad A = [0,1[= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

① $1 \geq a \quad \forall a \in A$

$\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente

L'ESTREMO SUPERIORE ESISTE?

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \exists M : M \geq a \ \forall a \in A$ (A è sup. limitato)

DEF

$$[\sup A]_n = \max\{[a]_n, \ a \in A\}$$

hanno tutti parte intera 0

$n=0$ $\quad \{[a]_0 \ a \in A\}$

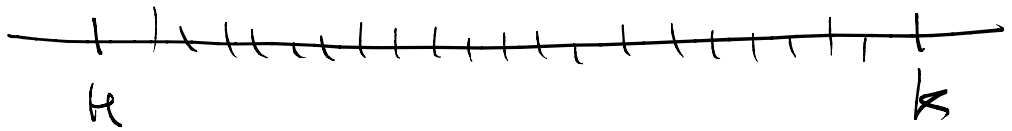
$\max = 0$ $\quad$ " $\{\emptyset\}$

$A = [0,1[$ $\quad$ ~~su $[0, 0.1[$~~

$\boxed{n=1}$

$\{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ $\quad \max = 0.9$

0.99



$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$n=1 \quad \{0.2, 0.3, \ldots, 0.7\}$

$$\left[\inf A\right]_n = \min\left\{[a]_n : a \in A\right\}$$

$$[\sup A]_n = \max \{ [a]_n \,:\, a \in A \}$$

è il minimo dei maggioranti?

$$[\sup A]_n \geq [a]_n \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow \sup A \geq a \quad \forall a \in A$$

$$[\sup A] = \Lambda$$

$$\Lambda - 2 \cdot 10^{-n} < \Lambda$$

$$[\Lambda - 2 \cdot 10^{-n}]_n < [\Lambda]_n$$

$$[\Lambda - 2\cdot 10^{-n}]_n = [\Lambda]_n - 2\cdot 10^{-n}$$

$$\exists\, a \in A : [a]_n = [\Lambda]_n$$

$$[\Lambda - 2\cdot 10^{-n}]_n \neq [\Lambda]_n$$

$$[\Lambda - 2\cdot 10^{-n}] \leq [\Lambda]_n$$

$$\Lambda - 2\cdot 10^{-n}$$

LOCALIZZAZIONE

(INTERVALLI INSCATOLATI)

(CANTOR)

HP

$I_1 = [a_1, b_1]$

$I_2 \subseteq I_1 \qquad I_2 = [a_2, b_2]$

$\vdots$

$I_n \subseteq I_{n-1} \qquad I_n = [a_n, b_n]$

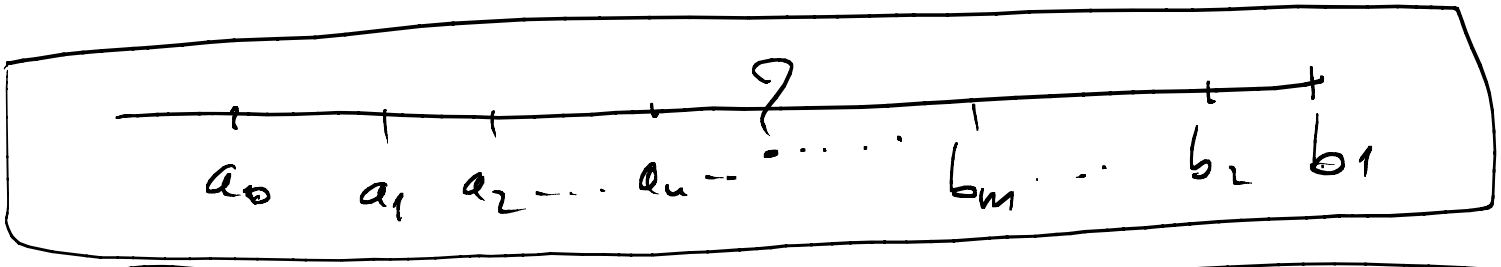
$\vdots$

$\forall N \quad \exists n : \underbrace{b_n - a_n}_{|I_n|} < 10^{-N}$

TS $\exists$ unico $x^* \in \mathbb{R}$: $\boxed{x^* \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}}$

DIM $I_n \supseteq I_{n+1}$ $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$

LEMMA $\forall n, m \in \mathbb{N}$ $a_n \le b_m$



DIM.

$n > m$

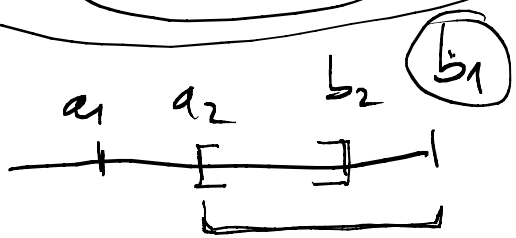
$\rightarrow$ $a_n \le b_m$

$a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b_{n-2} \le \cdots b_m$

$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$

$a_{n+1} \in I_n$ $\quad I_n \supseteq I_{n+1}$

$b_{n+1} \in I_n$



ogni b_m è un maggiorante per $\{a_n\}$, per ogni m fissato.

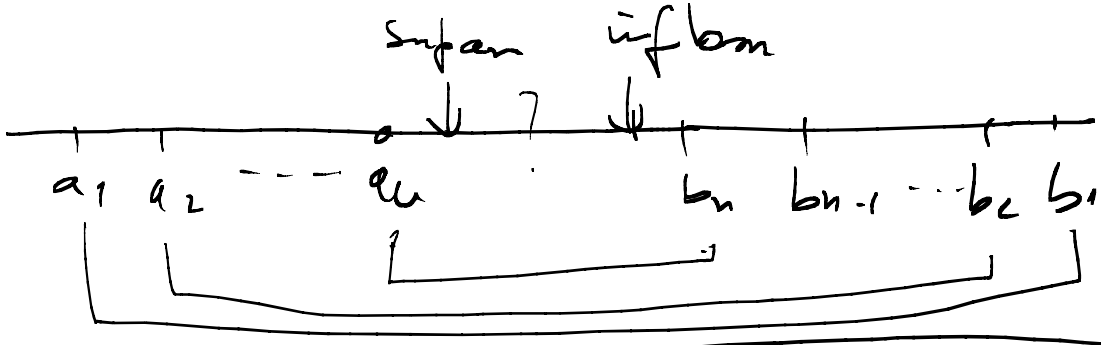
$\Rightarrow \sup a_n \leq b_m \quad \forall m$

$\sup a_n$ è minore o uguale ad ogni b_m e quindi è un minorante per $\{b_m\}$

$\Rightarrow \sup a_n \leq \inf b_m$

$\sup a_n$: un minorante

$\inf b_m$: massimo dei minoranti di b_m

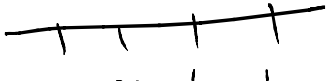


$$x^* = \sup a_n \qquad y^* = \inf b_n$$

$$x^*, y^* \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\exists\, n : \; b_n - a_n < 10^{-N}$$

$\Longrightarrow$ x^* dista da y^* meno di 10^{-N} $\forall N$



$y - x \leq b - a$

$$\underbrace{\sup\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \le 2\}}_{A}$$

2 è un magg. di A

$x^* < y^*$ $\quad \exists\, m$:

$$[x^*]_m < [y^*]_m + 2\cdot 10^{-m}$$

$|y^* - x^*| \le 10^{-n}$ $\forall n$ fissato

$x^*, y^* \in [a_n, b_n]$

$b_n - a_n = 10^{-n}$