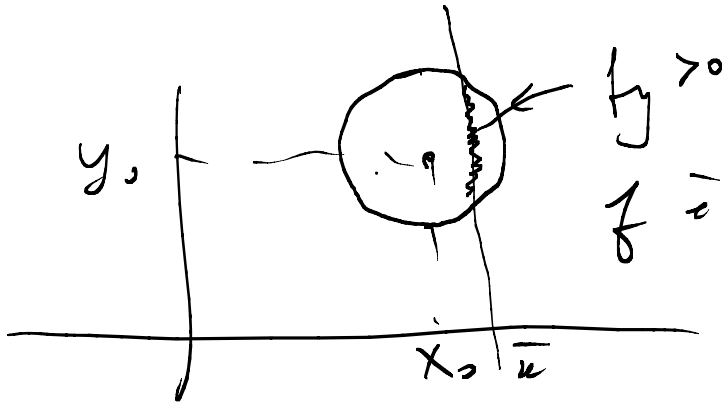
$f \in C^1(B_\rho(x_0, y_0))$

$f_y(x_0, y_0) > 0$ + $f \in C^1$ $\Longrightarrow$

$f_y(x_0, y_0) > 0$ in un intorno $B_\rho(x_0, y_0)$ di (x_0, y_0)



in $\mathbb{R}^1$ f è strett. crescente

$$x > y \Longrightarrow f(x) > f(y) \quad \forall x, y \in \text{dom } f$$

In pratica, si vuole $\boxed{f(x) > f(y)}$ e si verifica che l'insieme delle soluzioni contiene l'unione $\{(x,y) : x > y\}$.

Se la prima è strettamente (negli interni) $\boxed{f' > 0}$

$\phi(u,v) \qquad \phi : \Delta \to \mathbb{R}^3 \qquad \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$

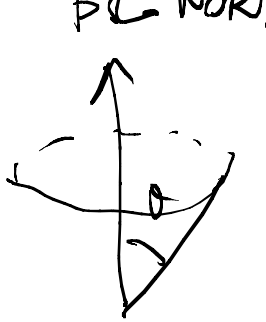
Piano tangente a ϕ nel punto $\phi(u_0, v_0) \equiv (x_0, y_0, z_0)$

$$\psi(\alpha, \beta) = \phi(u_0, v_0) + \alpha \phi_u(u_0, v_0) + \beta \phi_v(u_0, v_0)$$

$\phi(u_0, v_0)$: pto di tangenza

$\phi_u(u_0, v_0)$: vettore tangente

$\phi_v(u_0, v_0)$: vettore tangente



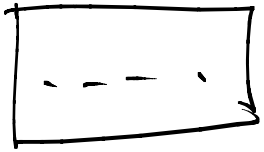
ψ ha per sostegno un piano affine (a prescindere dagli spostamenti di dim 2) se e solo se $\phi_u(u_0, v_0)$ e $\phi_v(u_0, v_0)$ sono indipendenti.

ϕ_u e ϕ_v sono indip in un punto $(u_0, v_0) \in \Delta$

se e solo se

$$\nu(u_0, v_0) = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$$

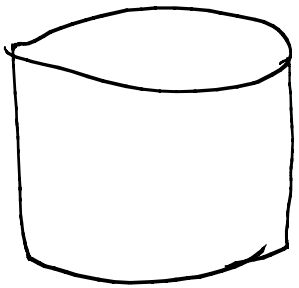
ϕ sarà detta <u>REGOLARE</u> in $(u_0, v_0) \in \Delta$

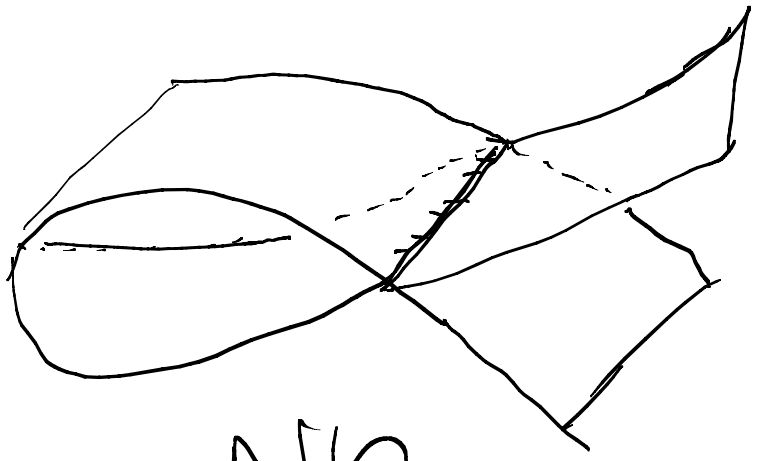
se $\nu(u_0, v_0) \neq 0$ + 

ϕ sarà detta REGOLARE in Δ se

1) $\phi \in C^1(\Delta)$ 2) $\nu(u,v) \neq 0 \quad \forall u, v \in \Delta$

3) ϕ è iniettiva su $\mathring{\Delta}$



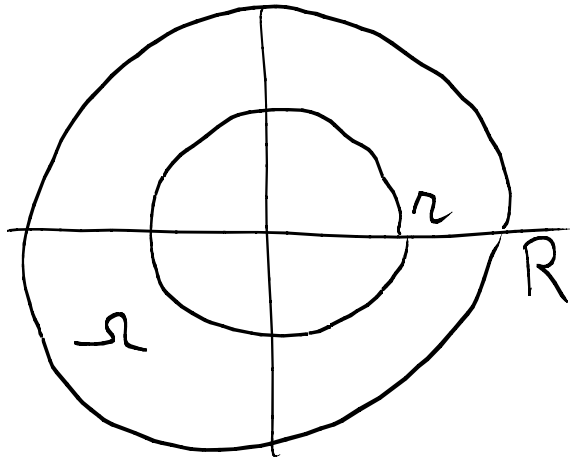


NO

$\phi(0,z) = \phi(2\pi,z)$

$\phi(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$

$[0,2\pi) \times [a,b]$



$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

Area

$$\int_\Omega 1 \, dx\, dy \underset{\text{polari}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) \right]$$

jacobiano

Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$A \leftrightarrow A(u) = Au$ (prodotto)

per essere iniettiva A deve avere colonne indipendenti

se $\ker A = \{x : Ax = 0\}$ ha solo la soluzione $x = 0$ allora e solo allora Ax è iniettiva

non è possibile perché ci sono 3 colonne in $\mathbb{R}^2$ (che ha dim = 2)

$3 > 2 \Rightarrow$ le colonne sono dipendenti per il Th. max # elementi indip.

Una matrice definisce un'applicazione se
il numero di colonne indipendenti coincide
con la dimensione dello spazio delle colonne (e così
col numero delle righe)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diag.

metrica reale simmetrica

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial e_1} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(1,0)) - f(x_0, y_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \text{derivata di } \boxed{t \to f(t, y_0)} \text{ in } t = x_0$$

$$f(x,y) = |xy| \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(1,0) =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(1,k) - f(1,0)}{k} = \quad (f(1,0) = 0)$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{|k|}{k}$$

NON ESISTE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\lim_{y \to L} g(y) = M$ $\Longrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$

$y = f(x)$

+

Una, almeno, tra

1) g continua in L

2) g non definita in L

3) $\exists \eta$: $f(x) \neq L$ in $\mathring{B}_{\eta}(x_0) \setminus \{x_0\}$. ←

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom}\, f \circ g \quad |x - x_0| < \delta$

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$$ DA PROVARE

Dalla seconda ipotesi, per lo stesso $\varepsilon > 0$ $\exists \rho$:

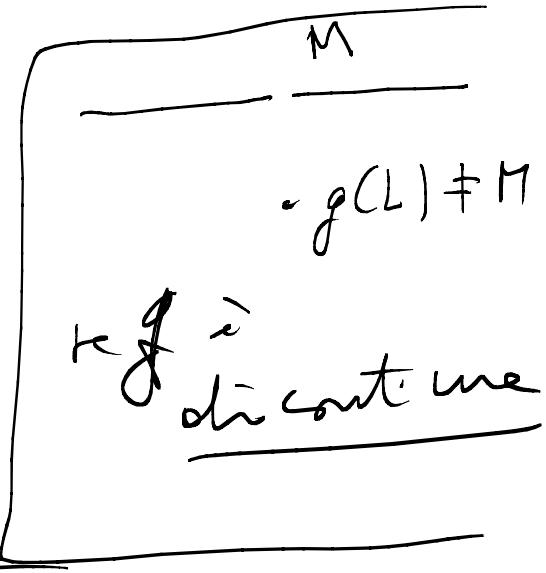
$|y - L| < \rho$, $y \in \text{dom}\, g$ $y \neq L \Rightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$

Per poter porre $y = f(x)$ e ricavare la disug. $|g(f(x)) - M| < \varepsilon$ devono

ci anche 1) $f(x) \in \text{dom}\, g$, 2) $|f(x) - L| < \rho$ (conseguente della ipotesi 1)

3) $f(x) \neq L$

1) Se g è continua in L allora $M = g(L)$
e la condizione $y \neq L$ NON è necessaria
per la verifica di $|g(y) - M| < \varepsilon$
$\|$
$g(L)$



---

2) Se g NON è definita in L, se fosse $f(x) = L$
si avrebbe che $g(f(x)) = g(L)$ non sarebbe definita
e quindi $x \notin \text{dom}\, f \circ g$

3) Le $f(x) \neq L$ su $B_\eta(x_0) \setminus \{x_0\}$

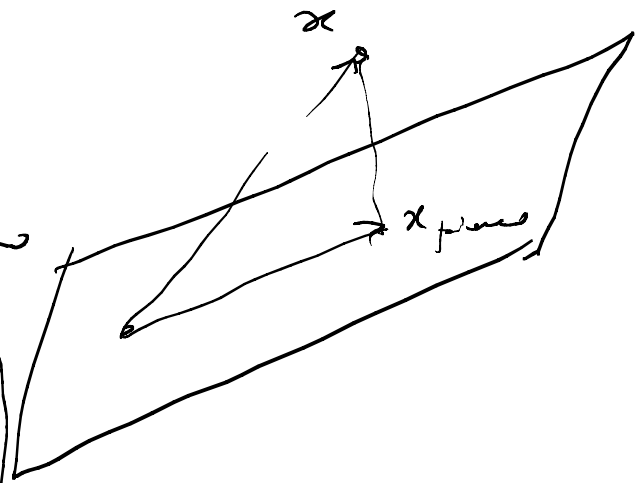
è quella necessaria per poi $y = f(x)$ e avere $y \neq L$

nella II ipotesi

$x_{<u_1 \dots u_n>}$ $u_1 \dots u_n$ vettori arbitrari (non tutti nulli)

$$x_{<u_1 \dots u_n>} = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad \text{ove } \alpha_i \text{ verificano}$$

$$\left[x - \sum_1^n \alpha_i u_i\right] u_j = 0 \qquad \forall j = 1 \dots n$$



n equazioni nelle n incognite $\alpha_1 \dots \alpha_n$

DEFINIZIONE DI Proiezione su uno spazio arbitrario.

$$\int_\gamma x^2 + yz$$

$$\gamma \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma : [a,b] \to \Omega$$

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

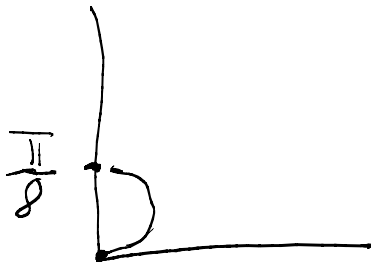
$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\int_\gamma f \equiv \int_a^b f(\gamma(t)) \, |\dot\gamma(t)| \, dt}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + t \sin t) \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + t \sin t) \, dt$$

$\rho = \frac{\theta}{4}$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$$

in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x(t) = \rho\cos\frac{\theta}{4} \\ y(t) = \rho\sin\frac{\theta}{4} \end{cases}$$

ρ, θ funz di t

$$\dot x^2 + \dot y^2 = \sqrt{\dot\rho^2(t) + \frac{1}{16}\rho^2(t)\,\dot\theta^2(t)}$$

$$\dot x = \dot\rho\cos\frac{\theta}{4} - \rho\frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{4}\dot\theta$$

$$\dot y = \dot\rho\sin\frac{\theta}{4} + \frac{1}{4}\rho\cos\frac{\theta}{4}\dot\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot\rho^2 + \frac{1}{16}\rho^2\dot\theta^2}\,dt$$

$\rho = t/4$

$\theta = t$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\frac{t^2}{16}\cdot 1}\,dt$$

$$\gamma(t) \to \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

coord. polari

$$\Lambda(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\theta^2}\, dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot f(t)^2 + f^2(t)}\, dt$$

$\rho = f(\theta)$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \dot\rho(t) &= \dot f(t) \\ \dot\theta(t) &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$$

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}}$$

2 omogenea

$\to 0$

$t = x^2+y^2$

$\to 1$

perché $\frac{\sin t}{t}$

NON è def. in $t=0$

1-omog.

$\to 0$

perché è 1-omogenea e limitata (per Weierstrass) su $(x^2+y^2=1)$

$(2x^2+y^2 \geq 0$ e $= 0$ solo se $x=0=y)$