Note Title 5/4/2021

$A : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ A integrabile (conservativo, potenziale)

se $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$: $\nabla f \equiv A$ su Ω

primitiva, potenziale

---

f è una primitiva di g su $[a,b]$ se $f' \equiv g$ in $[a,b]$

$\alpha(x, w) = A(x)w$

forme e campi associati

$\exists f : \nabla f = A \Rightarrow df \equiv \alpha$ equivalenti

$A \in C^0$

TEOR 1 C.N. perché $A \in C^0(\Omega)$ sia integrabile in Ω è che $\int_\gamma A$ dipenda solo dagli estremi della curva (e del loro ordine).

DIM. ($A \in C^0(\Omega)$ + integrabile $\Longrightarrow$ $\int_\gamma A$ dipende solo dagli estremi)

Poiché A è integrabile, $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$: $\boxed{\nabla f \equiv A}$ su Ω).

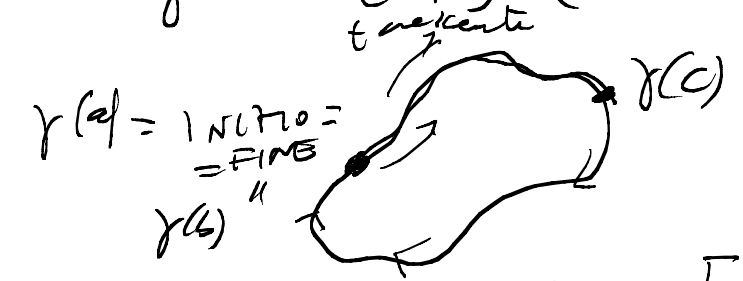
Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ curva di classe $C^1[a,b]$

$$\int_\gamma A \equiv \int_a^b A(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] dt \overset{\text{Torric.}}{=}$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$
DIFFERENZA DI POTENZ

$\longrightarrow$ E' vero che $\nabla f(\gamma(t))\, \dot\gamma(t) = \left[\frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right]\right]$?

COROLLARIO C.N. perché $A \in C^0(\Omega)$ sia integrabile in Ω è che $\int_\gamma A = 0$ per ogni curva CHIUSA $\gamma \in C^1[a,b]$ (che verifica $\gamma(a) = \gamma(b)$)



DIM $\gamma \in C^1[a,b]$, $\gamma(a) = \gamma(b)$; $c \in]a,b[$

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^c A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt + \int_c^b A(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= f(\gamma(c)) - f(\gamma(a)) + f(\gamma(b)) - f(\gamma(c))$$

$$= 0$$

perché $\gamma(a) = \gamma(b)$

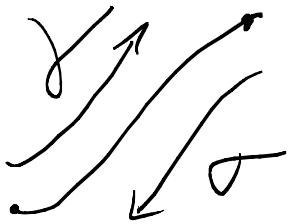
$\gamma(t)$ $\quad \gamma : [a,b] \to \Omega$ va da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$

$$\sigma(s) = \gamma\big(\underbrace{b + s(a-b)}_{\rho(s)}\big)$$

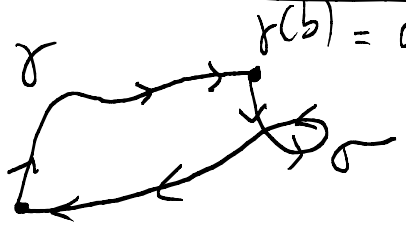
$s \in [0,1]$

$\sigma(0) = \gamma(b + 0(a-b)) =$
$= \gamma(b)$

$\sigma(1) = \gamma(b + a - b) =$
$= \gamma(a)$



$\rho(1) = a - b < 0$

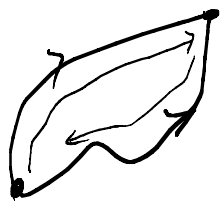


$\gamma(a) = \sigma(1)$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{per andare da } \gamma(a) \text{ a } \sigma(b) \\ \sigma(s) & \text{" " " } \sigma(0) = \gamma(a) \text{ a} \\ & \sigma(1) = \gamma(b) \end{cases}$$

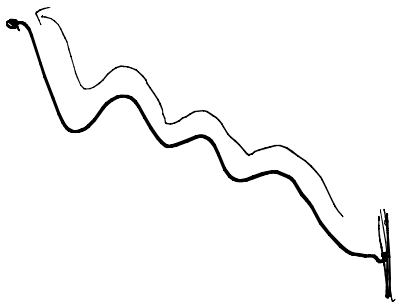
φ è chiusa perché parte e arriva nello stesso punto.

$$\int_\gamma = -\int_\sigma$$



A integr. C^0

$$\int_\gamma = \int_\sigma$$



$$\int_{\underbrace{\gamma \oplus \sigma}_{\text{saldatura}}} = \int_\gamma - \int_\sigma = 0$$

C.N. perché $A \in C^0(\Omega)$ sia integrabile su Ω è che $\int_\gamma A = 0$ per ogni curva chiusa γ in Ω.

corollario della C.N. precedente

C.N. perché $A \in C^1(\Omega)$ sia integrabile su Ω è che

$$(A_i)_{x_j} \equiv (A_j)_{x_i} \qquad \forall i,j = 1..n$$

(condizione del ROTORE)

$\text{rot}\, A = "\nabla \times A"$ $\quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ ← prodotto vettore

$\text{rot}\, A = 0$

DIM $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$; $\nabla f \equiv A$. Scarso

$A \in C^1$ (con $\nabla f \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$)

$(A_i)_{x_j} = (f_{x_i})_{x_j} \overset{\text{Schwarz}}{=\!=} (f_{x_j})_{x_i} = (A_j)_{x_i}$ ▨

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} \qquad A \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow C^2(\mathbb{R}^2$$

$A_1(x,y) = x^2$

$A_2(x,y) = xy$

$x_1 = x \quad x_2 = y$

$(A_1)_y \overset{?}{=\!=} (A_2)_x$

$(A_1)_y \equiv (x^2)_y \equiv 0$ ≠

$(A_2)_x = (xy)_x = y$

SONO DIVERSE!

$$\underbrace{\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)}_{A}$$

verifica la condizione del rotore

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$A \in C^\infty(\Omega)$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma A = 0$$

è quindi <u>NON</u> può essere integrabile

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)-(-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2)-x(2x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

SONO UGUALI!

Quindi il campo è IRROTAZIONALE (cioè verifica $(A_i)_{x_j} \equiv (A_j)_{x_i} \quad \forall i,j = 1-n$)

ma NON È INTEGRABILE e quindi la condizione del Rotore è SOLO NECESSARIA (in generale)

Una forma associata ad un campo irrotazionale si dice CHIUSA

$x\,dx + y\,dy$

$(x)_y \equiv 0 = (y)_x$

$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (È ANCHE ESATTA)

COME RICAVARE TUTTE LE PRIMITIVE di un campo vettoriale A.

$\nabla f \equiv A$ su Ω

$\nabla g \equiv A$ su Ω $\quad$ f, g primitive di A su Ω

Sottraendo membro a membro otteniamo

$\nabla(f-g) \equiv 0$ su Ω $\Rightarrow$ $f-g$ è costante su Ω aperto CONNESSO

ne segue che $\exists k$: $f(x) = f(x) + k$

$$\frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\left(\log|x|\right)' \equiv \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

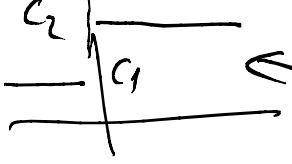
$$\left(\log|x| + c\right)' \equiv \frac{1}{x}$$

il dominio NON è connesso

$$\{x > 0\} \cup \{x < 0\}$$

$$\left(\log|x| + \begin{cases} c_1 & x > 0 \\ c_2 & x < 0 \end{cases}\right)' \equiv \frac{1}{x}$$

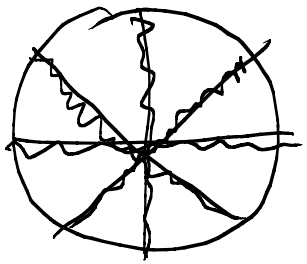
$f' \equiv 0 \Rightarrow f$ costante solo negli intervalli (che sono i connessi di $\mathbb{R}$)



ha derivata $\equiv 0$

Data una primitiva qualunque di un campo TUTTE LE ALTRE si trovano aggiungendovi una funzione COSTANTE SU OGNI SOTTINSIEME CONNESSO DEL SUO DOMINIO

$$+\begin{cases} C_1 & \text{primo "pezzo" connesso del dominio} \\ C_2 & \text{secondo " " " "} \\ \vdots & \\ C_n & \text{n-esimo " " " "} \end{cases}$$



8 costanti, una per ogni "fetta" della torta