Note Title 4/28/2021

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Data $y \in \mathbb{R}$

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^n \; : \; F(x) = y$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases} \leftarrow$$

Th. di invertibilità locale

$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad F \in C^1$

$F(x_0) = y_0$ $\quad x_0$ interno Ω, y_0 interno $F(\Omega)$

$$G_i(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = F_i(x_1, \dots, x_n) - y_i$$

$$\det \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right)(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

4) $\det F_x(x_0, y_0) \neq 0$

$\exists\ B_\delta(y_0)$, $\psi : B_\delta(y_0) \to \mathbb{R}^n$ ~~tale che~~

1) $\psi(y_0) = x_0$

2) $G(\psi(y), y) \equiv 0 \quad \forall y \in B_\delta(y_0)$

$F_i(\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_n(y)) - y_i \equiv 0$

$x_1 \quad x_2 \quad x_n$

$x_i = \psi_i(y)$ è l'inversa di F

$\psi_1 \quad \psi_n$

$F_i(x_1 \dots x_n) = y_i \quad i = 1 \dots n$

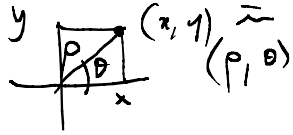
$G(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = 0$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$F(\rho, \theta) = (x, y) \qquad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$G(\rho, \theta; x, y) = F(\rho, \theta) - (x, y)$ $\qquad G = 0$

$$\begin{cases} \rho\cos\theta - x = 0 \\ \rho\sin\theta - y = 0 \end{cases}$$



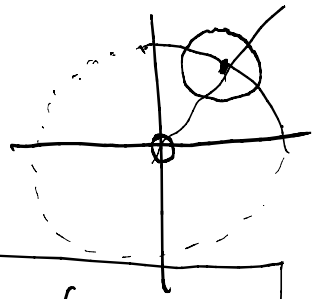
(x, y) in coordinate cartesiane
(ρ, θ) in coordinate polari (piane)

$$\frac{\partial F}{\partial(\rho,\theta)} \qquad \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Il determ. jacobiano vale

$$\det \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

se $\rho \neq 0$ si può applicare il th. inverso locale



$F : (\rho,\theta) \to (x,y)$ è invertibile vicino ad ogni punto $(\rho_0,\theta_0) \to (x_0,y_0)$

$$\arg(a+ib) = \{ \equiv$$

$$\boxed{\sum_1^n a_{ij} x_j = y_i}$$

$$G_i(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) = \sum_1^n a_{ij} x_j - y_i$$

$$\frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(a_{ij}) \neq 0$$

jacobienne de G injective de x

$F(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$

$F \in C^1(\Omega)$

x_0 interno ad Ω $\quad$ y_0 interno a $F(\Omega)$

$\det F_x(x_0) \neq 0$

$\Downarrow$

$\exists\, B_\delta(y_0) \quad \psi : B_\delta(y_0) \to \mathbb{R}^n$:

$F(x_0) = y_0$

$F(\psi(y)) = y \quad \forall y \in B_\delta(x_0)$

$\psi_y = - \cdot \cdot$ $\quad \psi \in C^1(B_\delta(x_0))$

Th. funz. inplicita (II)

F e ψ sono l'una inversa dell'altra

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$f \in C^\infty$$

$$\{(x,y) : f(x,y) = 1\}$$

è il grafico di una funzione (che esplicita una variabile in funzione delle altre) nell'intorno di quel punto?

Per esplicitare y in funzione di x occorre che $f_y \neq 0$

$$f_x(x,y) = 2x$$

$$f_y(x,y) = 3y^2$$

$\nabla f = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$

fuori dall'origine, quindi una delle variabili può essere esplicitata rispetto all'altra (PIVOT)

sull'asse y ($x=0$) f_x si annulla

$f_x(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ sull'asse y non è detto che si possa esplicitare x in funzione di y

FUORI DAGLI ASSI entrambe le derivate parziali sono $\neq 0$ (e quindi possono essere esplicitate le relative variabili)

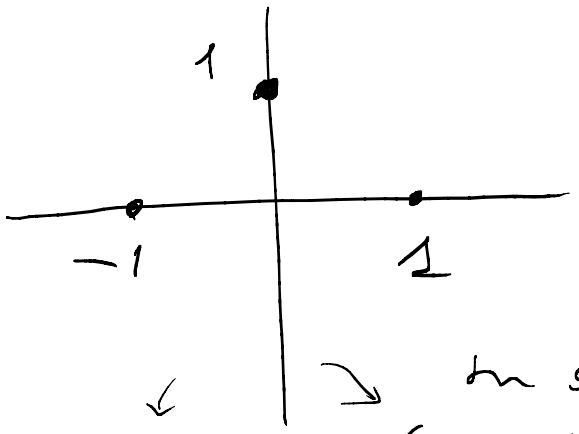
$$x^2 + y^3 = 1$$

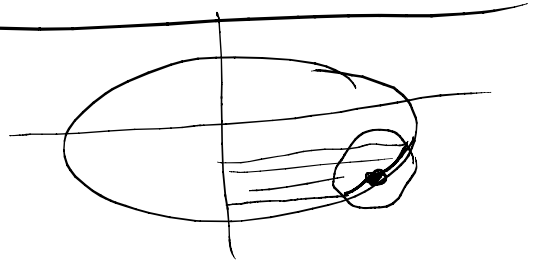
$$y^3 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt[3]{1 - x^2} \leftarrow$$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$





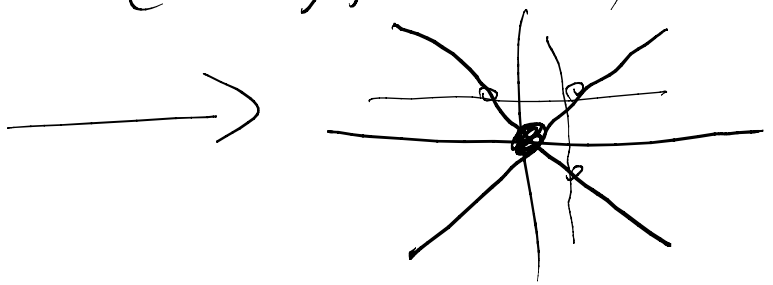
Γ è una curva di livello $f_y = 0$

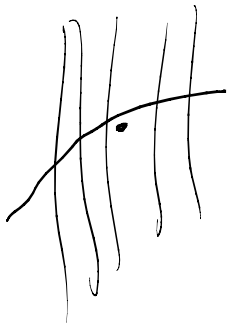
contiene $(0,1), (-1,0), (1,0)$

Il punto $(0,0) \notin \Gamma$ $\quad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0^2 + 0^3 \neq 1$

$f(x,y)\ \ x^2 - y^2 = 0$ $\qquad (x-y)(x+y)$





$f_x = 2x$

$f_y = 2y$

$\nabla f = 0$ sse

se $(x,y) = (0,0) \in \{f = 0\}$

$0^2 - 0^2 = 0$

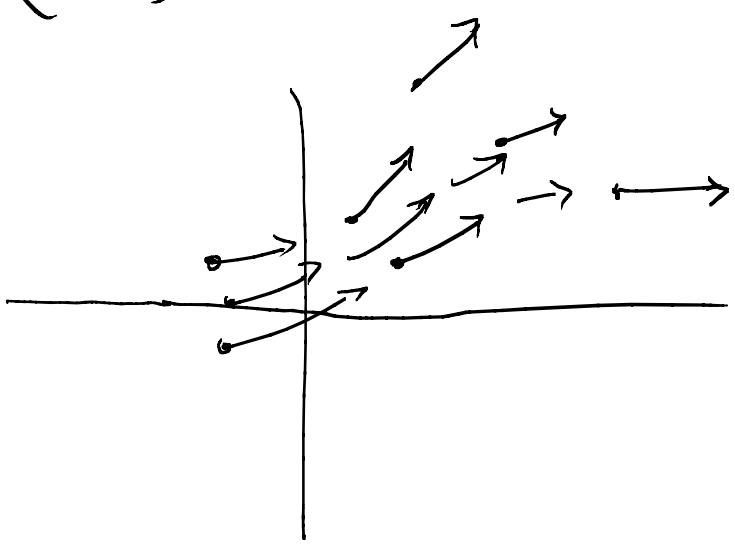
Non si può usare il th. DINI per esplicitare una qualunque variabile in funzione dell'altra

$f \longrightarrow \boxed{\nabla f}$ è definita in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \longrightarrow \nabla f(x)$

$f \longrightarrow \boxed{df}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$A : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

A CAMPO (DI VETTORI)

MODELLO DEI CAMPI DI FORZE (gravit., elett., magnet.)

e anche dei CAMPI DI VELOCITÀ NEI FLUIDI

A è detta di classe $C^0, (C^1, \dots, C^\infty)$
se le sue componenti scalari $(A_1, A_2, \dots, A_n)$
sono funzioni $C^0, (C^1, \dots, C^\infty)$ di loro argomenti
$x_1 - - x_n$.

$$(\rho, \theta) \longrightarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$\mathbb{R}^2$

$$df : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)$$

$$\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

α si dirà forma (differenziale lineare) se la funzione $w \to \alpha(x,w)$ è lineare per ogni $x \in \Omega$.

$$B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \exists\, b \in \mathbb{R}^n :$$

$$\underline{B(v) = b \cdot v}$$

CAMPO A associato alla forma α come il campo per cui

$$\alpha(x,w) = \boxed{A(x)\, w} = \boxed{A_1(x_1 \dots x_n)\, dx_1 + \dots + A_n(x_1 \dots x_n)\, dx_n}$$

Esempi

campo di vettori tipico.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\in \mathbb{R}^2$

$$A_1(x,y) = xy$$

$$A_2(x,y) = x^2+y^2$$

$$x\,dx + y\,dy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}\right)$$

$w = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$

forma differenziale tipica

campo associato ad α

$A(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

punto

w

incremento

Integrale (~~curvilineo~~) di campi e di forme

CAMPI $A : \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

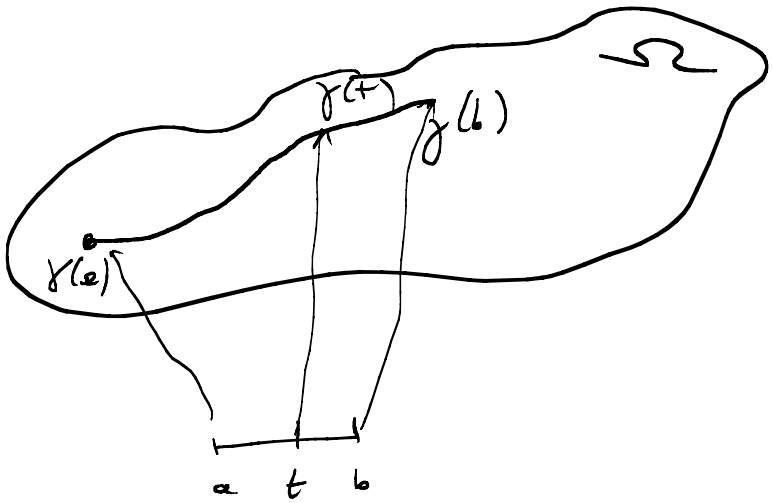
(Almeno $A \in C^0$)

$\gamma \in C^1[a,b] \qquad \gamma : [a,b] \to \Omega$

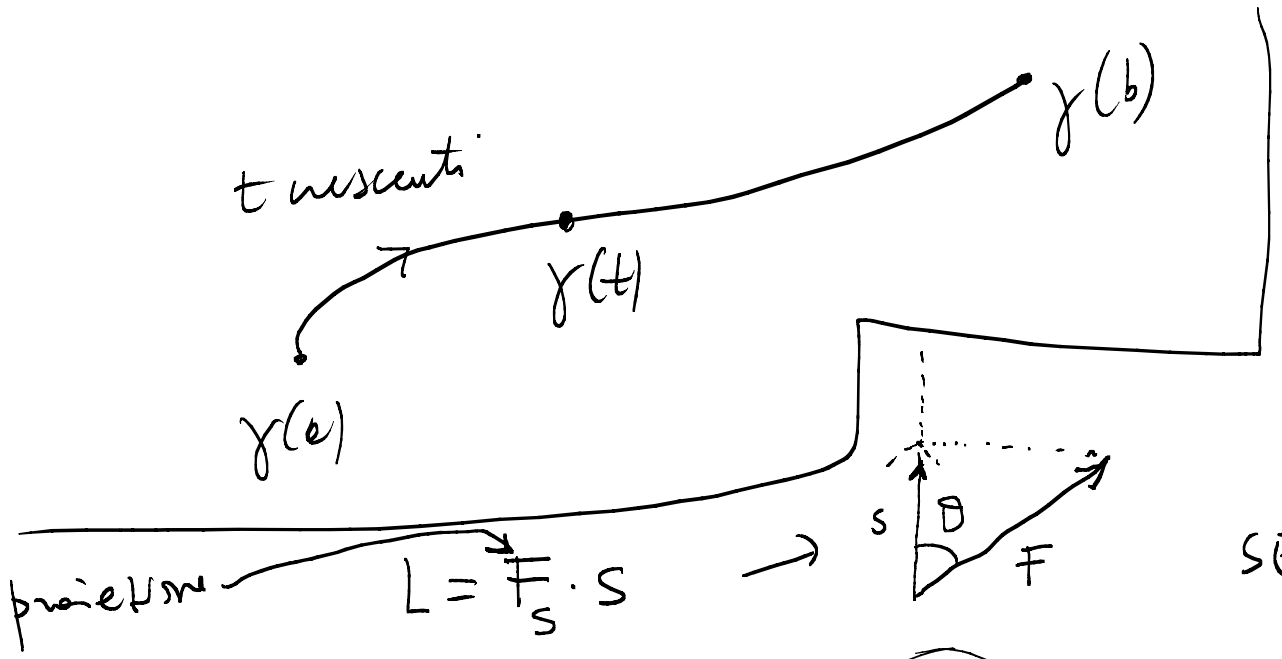
sostegno (immagine) di γ è TUTTO CONTENUTO IN Ω

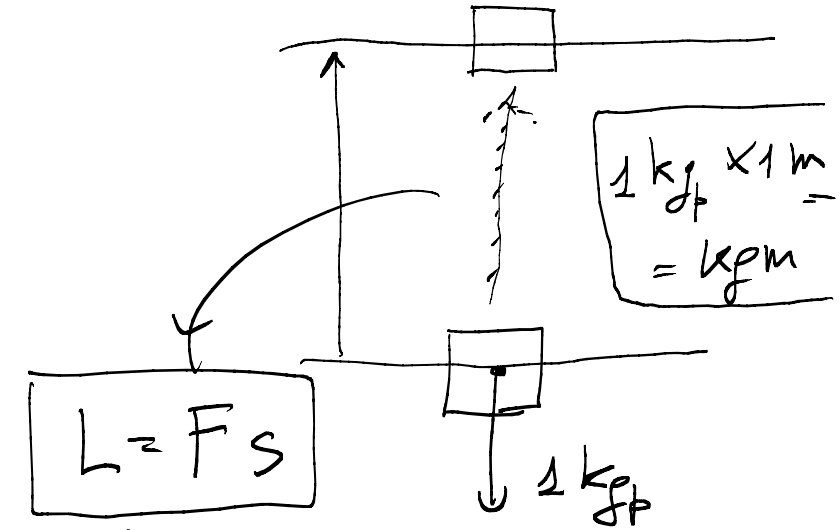
$$\int_\gamma A \equiv \int_a^b \underbrace{A(\gamma(t))}_{\in C^0} \cdot \underbrace{\dot\gamma(t)}_{C^0}\, dt$$

$\cdot$ = prodotto scalare



LAVORO NEL CAMPO GRAVITAZIONALE





SE F ed s
sono allineati

$$|L| = |F||s| \cos\theta = F\,s$$

prodotto scalare

$$\int_a^b F(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt$$

spazio percorso nel tempo dt

$$\frac{ds}{\|}$$

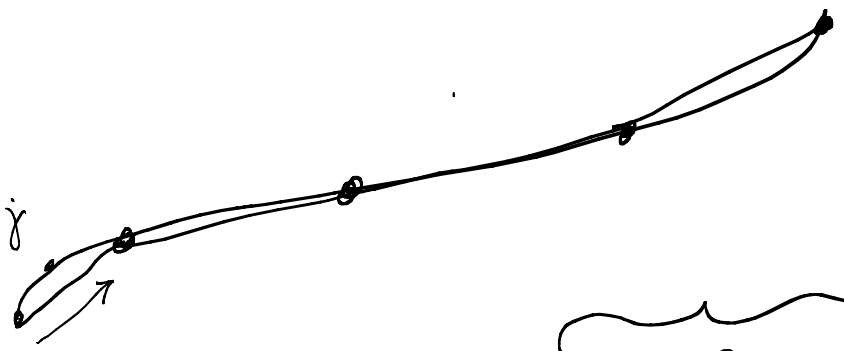
spostamento (vettore)

forza

prodotto scalare

velocità di spostamento

$$\int_a^b f(t)\,dt \overset{?}{\approx} \sum_1^N f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$



$$\int \underbrace{F(\gamma(t))\,\underbrace{\dot{\gamma}(t)\,dt}_{ds}}$$