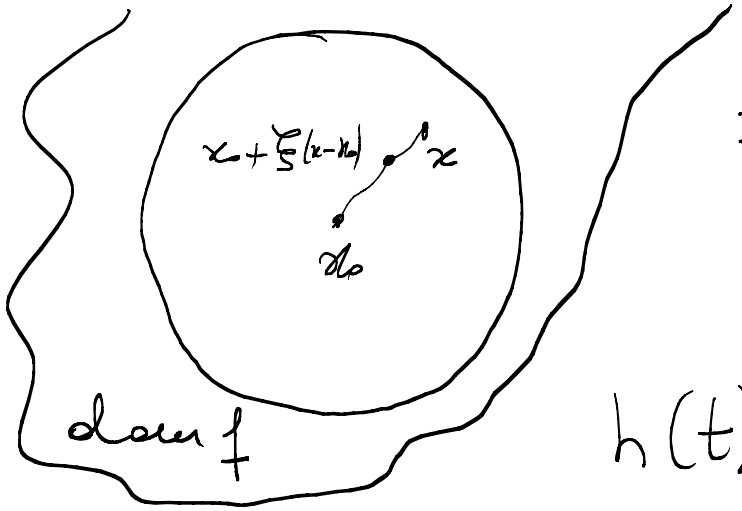
Note Title 4/27/2021



$\exists\, \xi \in]0,1[$:

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f\big(x_0 + \xi(x-x_0)\big)(x-x_0)$$

$$h(t) = f\big(\underbrace{x_0 + t(x-x_0)}_{\text{segmento da } x_0 \text{ ad } x}\big) \qquad t \in [0,1]$$

$f \in C^1 \Longrightarrow f$ è differenziabile $\Longrightarrow$ derivabilità della funzione composta $h(t)$

e quindi $h'(t) = \overbrace{\nabla f\big(x_0 + t(x-x_0)\big)}^{f'(\sigma(t))} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\sigma'(t)}$

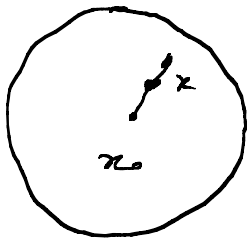
$\sigma(t) = x_0 + t(x-x_0) \quad \sigma'(t) = (x-x_0)$

per il th. di Lagrange applicato ad h su $[0,1]$, segue

$$\exists \xi \in]0,1[: \; h(1) - h(0) = h'(\xi)(1-0)$$

$$\underbrace{f(\sigma(1))}_{f(x)} - \underbrace{f(\sigma(0))}_{f(x_0)} = \nabla f\big(x_0 + \xi(x-x_0)\big)(x-x_0)$$

$\nabla f \equiv 0$ su $B_\delta(x_0) \Rightarrow f$ è costante su $B_\delta(x_0)$



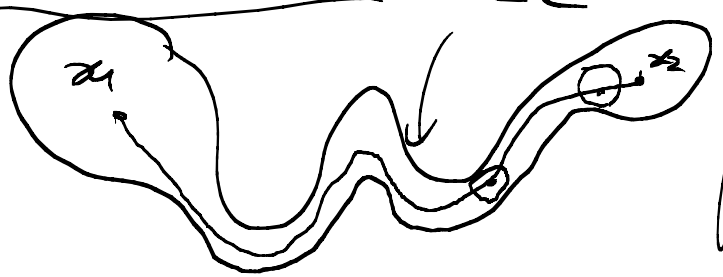
$$\exists \xi \in]0,1[:$$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\nabla f\big(x_0 + \xi(x-x_0)\big)(x-x_0)}_{=0} = 0$$

$\Downarrow$

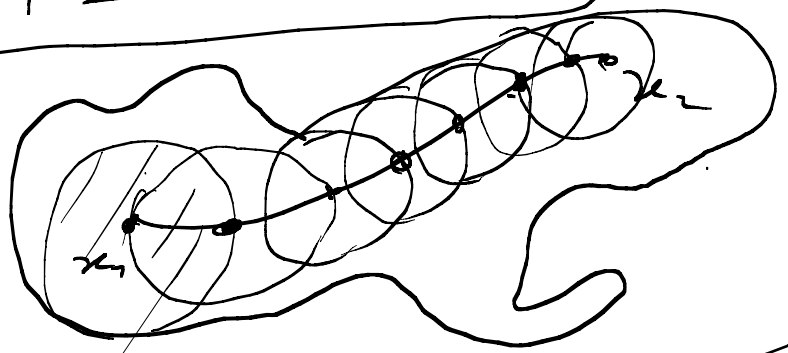
$f(x) = f(x_0)$

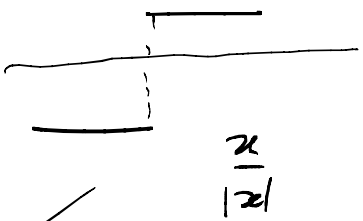
Ω aperto connesso $(\forall x_1, x_2 \ \exists \gamma$ continua da $[0,1] \to \Omega$:
$\gamma(0) = x_1 \quad \gamma(1) = x_2)$

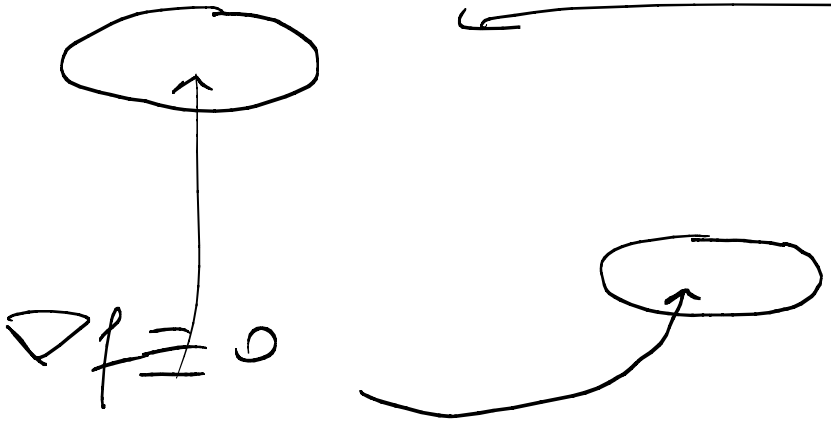


$\nabla f \equiv 0$ in Ω $\Longrightarrow$ costante

$d(\gamma(t), \partial\Omega) \geq \varepsilon > 0$







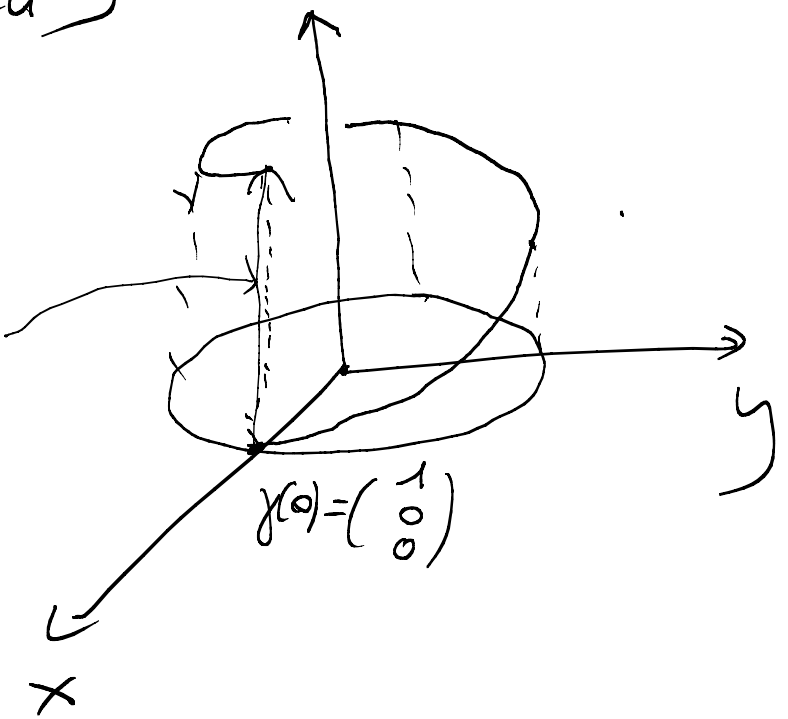
f non è costante

(La connessione è essenziale)

Il th. di Lagrange "classico" NON si estende alle curve (C^1)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma(2\pi) - \gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$



$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\sin t$ e $\cos t$ non sono MAI contemporaneamente 0

perché $\sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$

$$\gamma(2\pi) - \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} (2\pi - 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\gamma_i(b) - \gamma_i(a) = \dot{\gamma}(\xi)(b-a)}$$

i-esima componente scalare di γ

può variare al variare di i

$$\boxed{\xi \equiv \xi_i}$$

TEOREMA DI U. DINI

1) $f(x_0, y_0) = 0$ ✓

2) (x_0, y_0) è interno ad Ω ✓

3) f è $C^1(\Omega)$ ←

4) $f_y(x_0, y_0) > 0$ ←

⇓

1) $\exists\ \delta > 0$ $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

2) $\varphi(x_0) = y_0$ ←

3) $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

4) φ è derivabile e

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

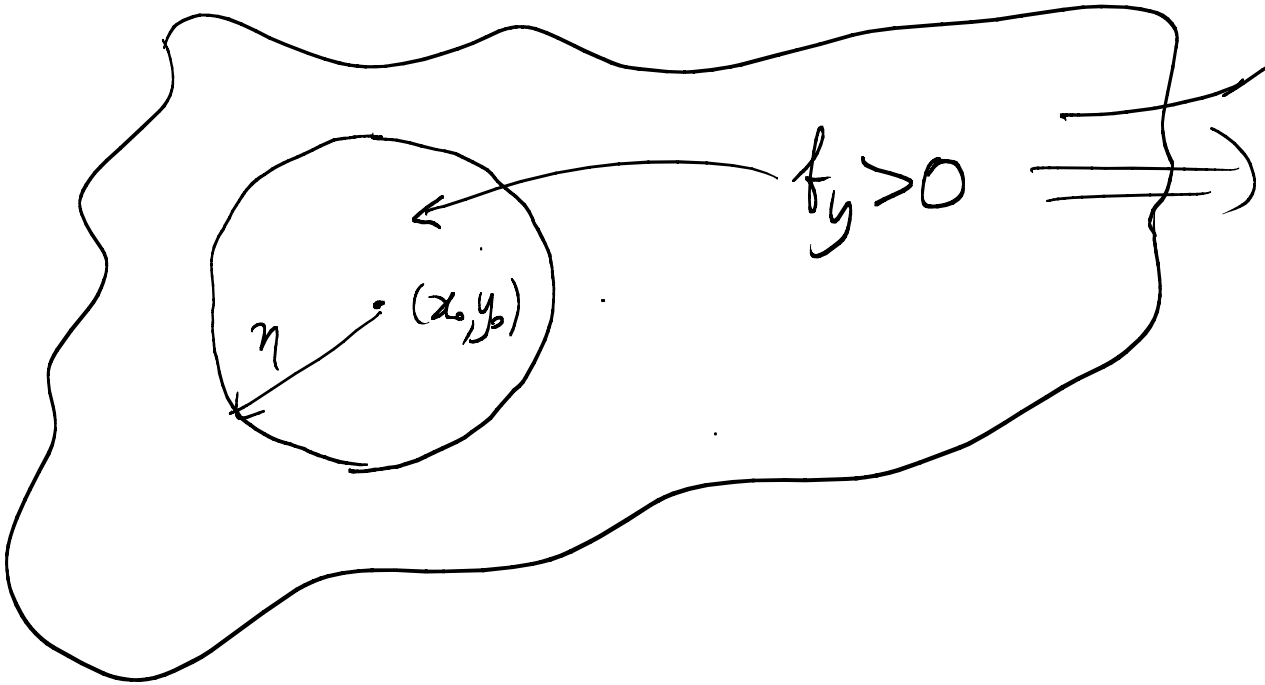
2)+4) Problema di Cauchy

curve di livello

DIM. Per la permanenza del segno ($f_y \in C^0$ per ipotesi)

$\exists \eta > 0 : \quad f_y(x,y) > 0$ se $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \eta$

$(x,y) \in \text{dom } f_y$



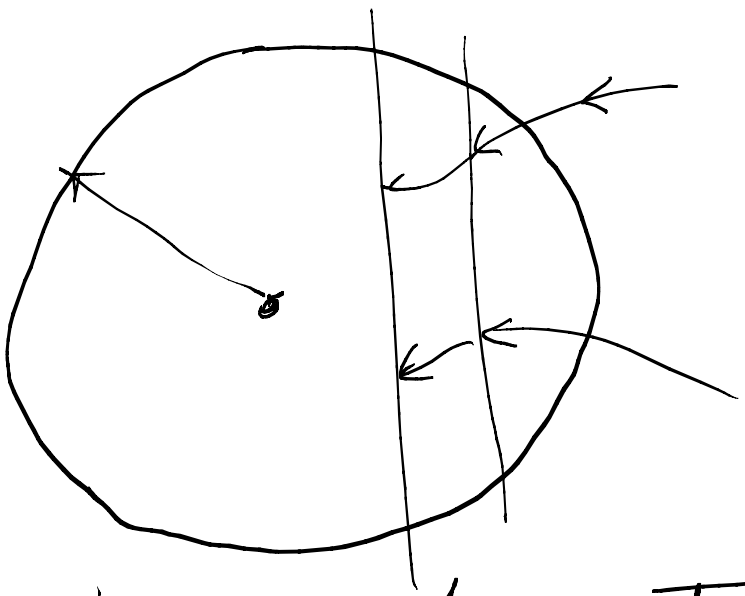
$y \to f(x,y)$ è strett. crescente

su SEGMENTI verticali $x = \text{cost}$

$(x,y) \in \overline{B_\eta}(x_0,y_0)$

Poiché (x_0,y_0) è interno a dom f $\exists \sigma : B_\sigma((x_0,y_0)) \subseteq \Omega$

Ponendo $\varepsilon = \min\{\eta, \sigma\}$



$f_y(x,y) > 0$ in ogni punto

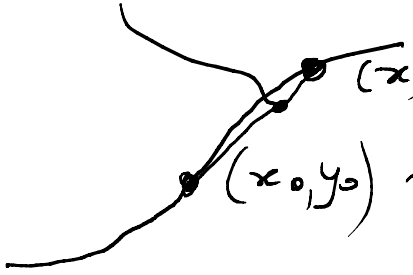
"intervalli"

a $y \to f(x,y)$ si può applicare Lagrange in 1 variabile

Per il th. DINI con f continua e strett. monotona in una direzione, $\exists\ \delta, \varphi$ verificati 1), 2), 3),

Per verificare 4), consideriamo (x_0, y_0) e $(x, \varphi(x))$

$: (x_0, y_0) + \xi(x - x_0, \varphi(x) - \varphi(x_0))$



$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

da 3)
$f(x, \varphi(x)) = 0$
$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$\underbrace{f(x, \varphi(x))}_{=0} - \underbrace{f(x_0, \varphi(x_0))}_{=0} \overset{\text{"Lagrange in più variabili"}}{=\!=} \text{per un opp. } \xi \in]0,1[=$$

$\varphi(x_0) = y_0$ per la 2)

$$= f_x\big(x_0 + \xi(x - x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0))\big)(x - x_0) +$$

$$+ f_y\big(\qquad \big)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

supposto $x \neq x_0$ e notando che

$(x_0 + \xi \cdots , \varphi(x_0) + \xi \cdots)$ è un punto

del segmento di estremi (x_0, y_0) e $(x, \varphi(x))$

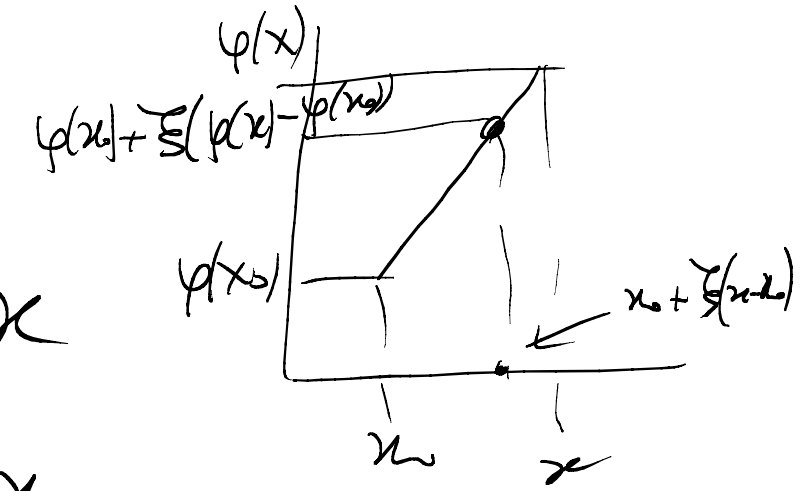
che appartengono alla sfera di raggio ε onde

$f_y > 0$, dividendo per $(x - x_0)$ e per $f_y(\ )$

si segue

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f_x\left(x_0 + \xi(x - x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0)\right)}{f_y(\qquad\qquad\qquad\qquad)}$$

per $x \longrightarrow x_0$



$$x_0 < x_0 + \xi(x - x_0) < x$$

per il Th. confronto $\lim_{x \to x_0} x_0 + \xi(x - x_0) = x_0$

$$\varphi(x_0) < \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \leq \varphi(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0)) = \varphi(x_0)$$

$\varphi(x) - \varphi(x_0) \to 0$ perché $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ perché φ è continua

per il Th. nel caso continuo

se segue che il II membro tende a

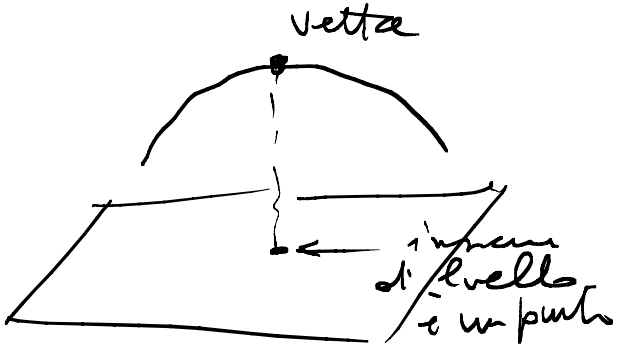
$$-\frac{f_x(x_0,\varphi(x_0))}{f_y(x_0,\varphi(x_0))} \equiv -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

Per provare la formula negli altri punti si sposta il punto iniziale (x_0,y_0) nel punto volute $(x,\varphi(x))$

In ogni punto di un insieme di livello k in cui $\boxed{\nabla f \neq 0}$ ($\equiv$ almeno una derivata parziale non si annulla, se $f \in C^1$) quella variabile può essere esplicitata rispetto all'altra, cioè si può risolvere l'equazione $f(x_1, \dots, x_n) = k$ rispetto a quella variabile

---



Th. DINI per i sistemi di equazioni

$f(x,y) = 0 \in \mathbb{R}^k$ $\quad f : \Omega \times \Sigma \to \mathbb{R}^k$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^k$

$x \in \Omega$

$y \in \Sigma$

$\downarrow$

k equazioni in

$n+k$ incognite

$x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_k$

1) $x_0 \in \Omega, y_0 \in \Sigma : f(x_0, y_0) = 0 \in \mathbb{R}^k$
2) (x_0, y_0) interno a $\Omega \times \Sigma$
3) f di classe $C^1(\Omega \times \Sigma)$
4) $\det\left(f_y(x_0, y_0)\right) \neq 0$

$$\det(f_y) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & & & \frac{\partial f_n}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

$k \times k$

JACOBIANO

JACOBIANA

TS.

1) $\exists\, \delta, \varphi : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^k$:

2) $\varphi(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^k$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$)

3) $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ su $B_\delta(x_0)$

(forma esplicita

$y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n)$

↑ PIVOT)

4) $\varphi_x(x) = -\left[f_y(x, \varphi(x))\right]^{-1} f_x(x, \varphi(x))$

← NON PIVOT

matrix $k \times n$ $\quad k \times k \quad k \times n$