Note Title 4/23/2021

massimi e minimi di f su insiemi privi di punti interni
(NIENTE FERMAT)

Strategia 1 L'insieme si può decomporre nell'unione di un numero finito di grafici di funzioni

$f(x, g(x))$ $\qquad$ $f(g(y), y)$

graph g

e si studiano le funzioni di una sola variabile così ottenute sul loro dominio

le f su Ω si può studiare essenzialmente su $[-1, 1]$ le funz $f(x, \sqrt{1-x^2})$ e $f(x, -\sqrt{1-x^2})$

$\Omega = \{ x^2 + y^2 - 1 = 0 \}$

$f(x,y) = xy$ $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

$y = \sqrt{1-x^2}$ oppure $y = -\sqrt{1-x^2}$ per $x \in [-1,1]$

$h(x) = x\sqrt{1-x^2}$ oppure $h(x) = -x\sqrt{1-x^2}$

Strategia 2 Equazioni parametriche

$\Omega = \operatorname{Im}\gamma \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

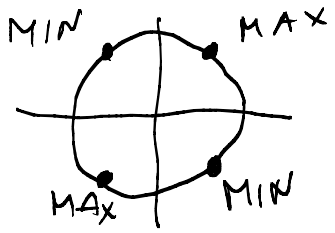
In questo caso devo studiare $f(x,y)$ per $x = \cos t$, $y = \sin t$

e cioè $h(t) = \cos t \sin t \quad t \in [0, 2\pi]$

$= \frac{1}{2}\sin 2t$ $\quad h(t)$ è massimo se

$2t = \frac{\pi}{2}$ oppure $2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi$

$t = \frac{\pi}{4}$ $\quad t = \frac{\pi}{4} + \pi$



MIN $\quad 2t = \frac{3}{2}\pi$ oppure $2t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi$

$t = \frac{3}{4}\pi$ oppure $t = \frac{3}{4}\pi + \pi$

I caso	II caso
$x\sqrt{1-x^2}$ su $[-1,1]$	sin cos su $[0, 2\pi]$

STRATEGIA 3 Metodo dei MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$f(x,y) = xy$ $\quad \{(x,y) : g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0\}$ $\quad x^2+y^2 = 1$

curva di livello 0 di $g(x,y)$

Si possono trovare max e min fra le soluzioni del sistema d'equazioni

$n+1$ equazioni in $n+1$ incognite $\quad \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0 \;;\; g(x,y) = 0$

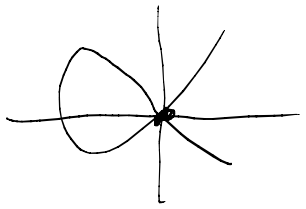
λ → INCOGNITA (MOLTIPLICATORE)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla f + \lambda \nabla g = \begin{pmatrix} y + 2\lambda x \\ x + 2\lambda y \end{pmatrix}$$

$\lambda, x, y \neq 0$

$$\rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x = -2\lambda y \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \qquad y^2 - x^2 = 0$$

$y - x = 0$ | $y + x = 0$

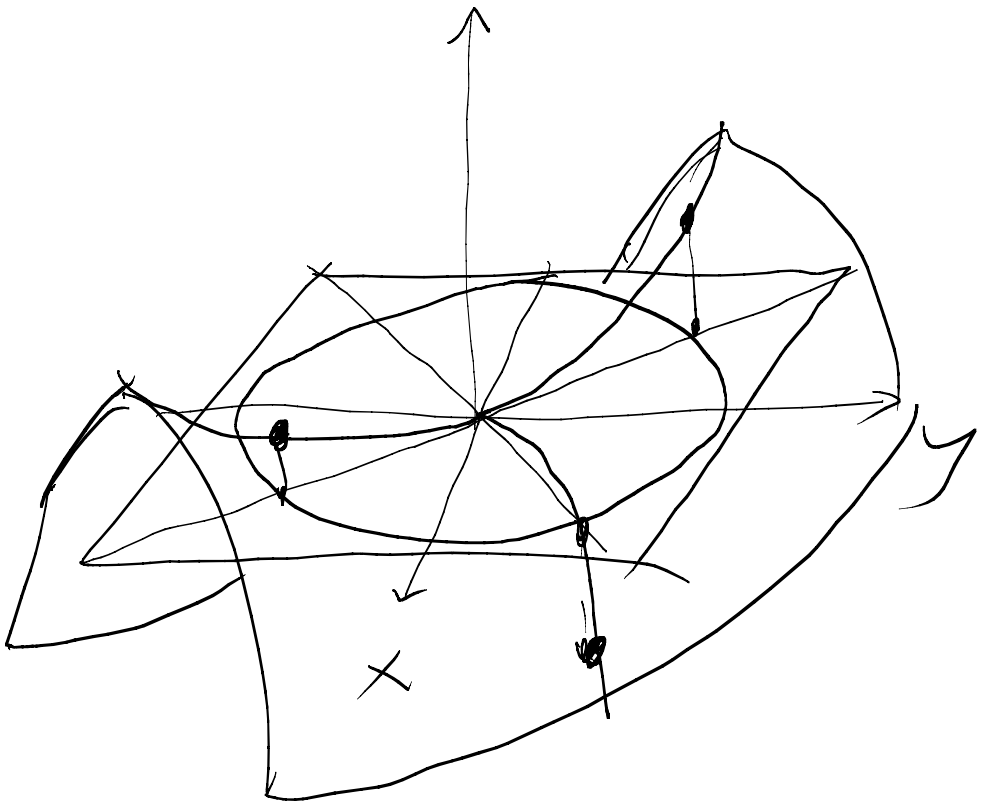
LE DUE BISETTRICI

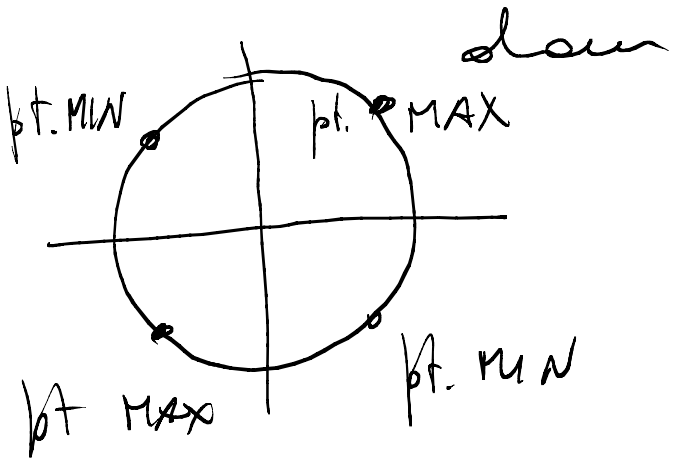
Sostituendo $y = x$ e $y = -x$ in $x^2 + y^2 = 1$ si trovano le quattro soluzioni

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{4}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2}{4}$$

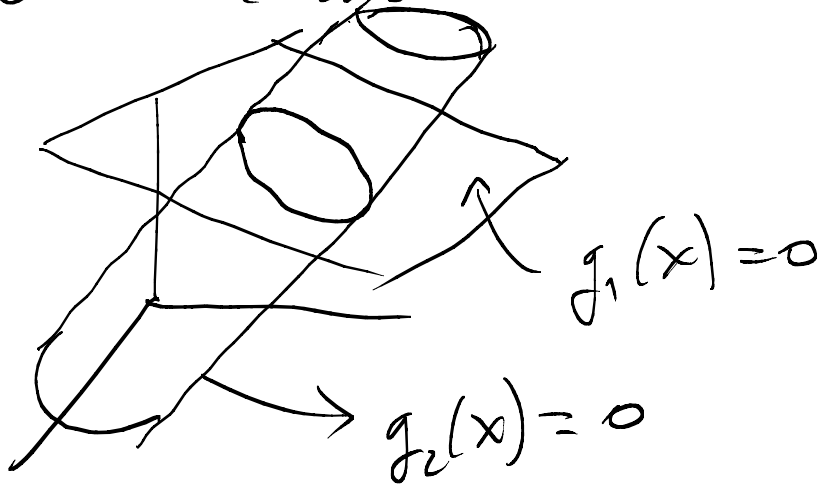

y
x


pt. MIN
pt. MAX
pt MAX
pt. MIN

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{k} \{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0 \}$$

equazioni implicite di superfici che, intersecate, danno l'insieme Ω



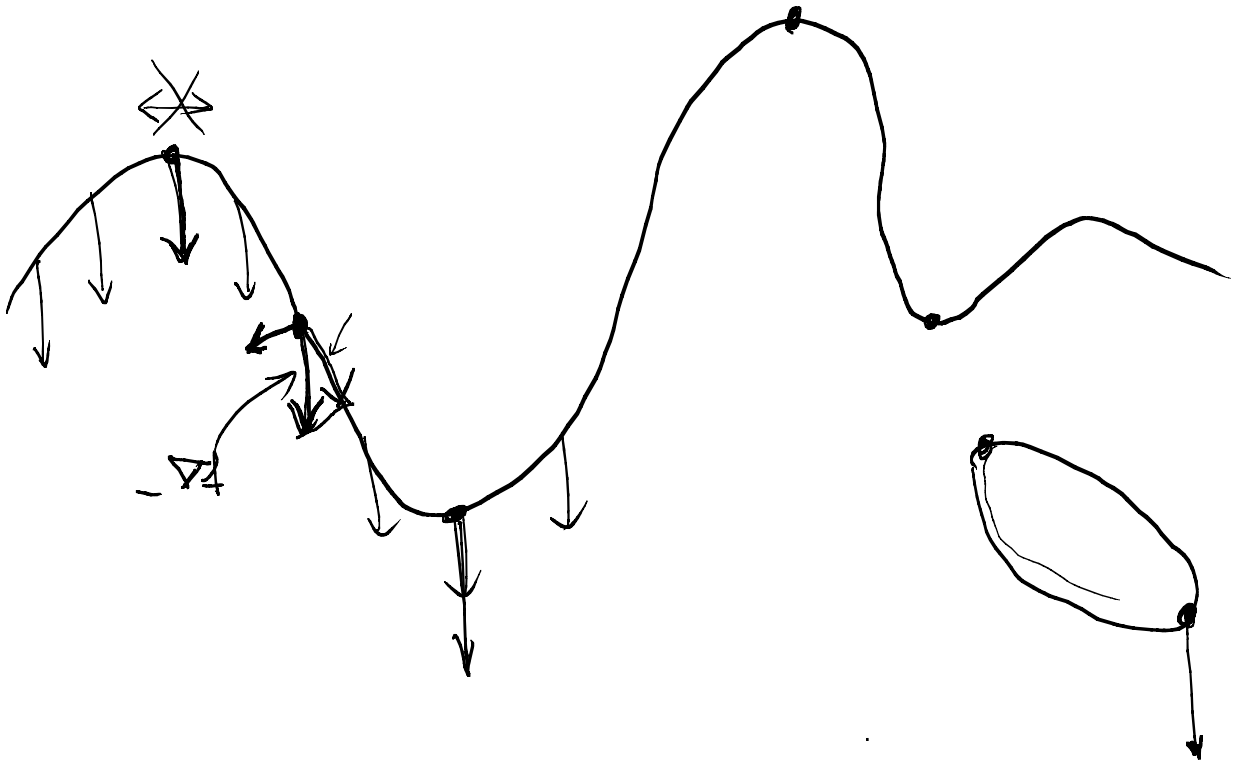
MOLTIPLICATORI

gli estremi di f su Ω vanno ricercati fra le soluzioni di

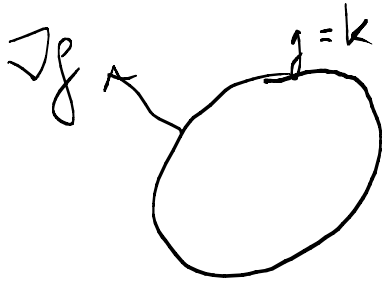
REAZIONI VINCOLARI

$$\nabla f + \sum_{1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0, \quad g_1(x)=0, \dots, g_k(x)=0$$

$n+k$ equazioni nelle $n+k$ incognite $x_1 \dots x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$



$-\nabla f$ forza di gravità



curve di livello sono $\perp$ gradienti