Note Title 4/21/2021

- $u_1 \dots u_n$ autovettori di A
- $\lambda_1 \dots \lambda_n$: $A(u_i) = \lambda_i u_i \quad \forall i = 1 \dots n$

λ_i = autovalore di u_i

- $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

$\Rightarrow$ $u_1 \dots u_n$ indipendenti

AL_7.1

$A : X \to X$ $\quad$ X euclideo

A si dice autoaggiunto se

$$\boxed{A(u)\,v = u\,A(v) \quad \forall u, v \in X}$$

Lemma 1 $A : X \to X$ è autoaggiunto allora ogni suo autovalore è reale. (lo spettro è reale)

$$\begin{cases} A(u) = \lambda u \\ u \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A(u)\,u = (\lambda u)\,u = \lambda |u|^2 \\ \| \\ u\,A(u) = u\,(\lambda u) = \bar{\lambda} |u|^2 \end{array} \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) |u|^2 = 0$$

$|u| \neq 0$

$$\boxed{\lambda - \bar{\lambda} = 0}$$

$$\begin{cases} A(u) = \lambda u \\ u \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(v) = \mu v \\ v \neq 0 \end{cases} \qquad \underline{\lambda \neq \mu}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{uv = 0} \quad \text{(ortogonal)}$$

$$A(u)v = (\lambda u)v = \lambda(uv)$$

$$\|$$

$$u\,A(v) = u(\mu v) = \bar{\mu}(uv) = \mu(uv)$$

A è autoaff. e μ è reale

$$(\lambda - \mu)\,uv = 0$$

$\neq 0$ per ipotesi

$$\Downarrow$$

$$uv = 0$$

$$\boxed{\text{AL\_7.1}}$$

Lemma 3 $\begin{cases} A(u) = \lambda u \\ u \neq 0 \end{cases}$ $\quad wu = 0 \Rightarrow A(w)u = 0$

$W = \{ w \,;\, wu = 0 \}$ allora $A : W \to W$

DIM. $\underline{A(w)u} \underset{A \text{ autoagg.}}{=} w A(u) \underset{u \text{ autovettore}}{=} w(\lambda u) = \underbrace{\bar{\lambda}(wu)}_{= 0}$

X di dim $n > 0$

$u_1 \dots u_k$ indip $k < n$

DIM. Siccome $k < n$ $\langle u_1 \dots u_k \rangle \subset X$

sia $u_{k+1} \in X$ e $u_{k+1} \notin \langle u_1 \dots u_k \rangle$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i = 0$$

$$\sum_{1}^{k} \alpha_i u_i + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0$$

$A : X \longrightarrow Y$ $\boxed{0 < \dim X < \infty}$

$u_1 \dots u_n$ base di X (basta che siano generatori non occorre l'indipendenza)

Allora $\boxed{A(u_1), A(u_2), \dots, A(u_n)}$ generano $A(X) = \operatorname{Im} A$

DIM. $\forall\, y \in \operatorname{Im} A \quad \exists\, x \in X : \; y = A(x)$

$\forall\, x \in X \quad \exists\, \alpha_i : \; x = \sum_1^n \alpha_i \cdot u_i \Rightarrow A(u) = A\left(\sum_1^n \alpha_i \cdot u_i\right) =$

$= \sum_1^n \alpha_i \cdot A(u_i)$

$\in \langle A(u_1), A(u_2) \dots A(u_n) \rangle$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} A \subseteq \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle$$

E' vero anche il viceversa, poiché

$$A(u_1), A(u_2), \dots, A(u_n) \in \operatorname{Im} A \Rightarrow$$

poiché $\operatorname{Im} A$ è un sottospazio di V, se contiene i vettori $A(u_1), \dots, A(u_n)$ contiene anche tutte le loro combinazioni lineari e cioè

$$\operatorname{Im} A \supseteq \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle$$

X spazio di dim finita >0.

$u_1 \dots u_n$

$u'_1 \dots u'_n$ basi di X

$$\underbrace{u'_j = M_{ij}}\, u_i \underset{\text{Einstein}}{\equiv} \sum_{i=1}^{n} \boxed{M_{ij}}\, u_i$$

$\boxed{AL\_6.3\ ?}$

Matrice di cambio base

ed ha per colonna j-esima le coordinate di u'_j rispetto a $u_1 \dots u_n$

$e_1 \dots e_n$ sistema ortogonale $\quad e_i e_j = \begin{cases} \neq 0 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

$$x_{<e_1 \dots e_n>} = \sum_1^n x_{e_i} = \sum \frac{x e_i}{|e_i|^2} e_i$$

$$\Downarrow$$

$$\left[x - \sum_1^n x_{e_i} \right] e_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$u_1 \dots u_n$ generici

Def $\quad x_{<u_1 \dots u_n>} = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad : \quad \left[x - \sum_1^n \alpha_i u_i \right] u_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$

$A : X \to Y$ $\boxed{\dim X = \dim Y}$

CNS perché A sia iniettivo è che sia anche suriettivo (e quindi biiettivo)

DIM

$$\dim X = \dim \ker A + \dim A(X)$$

$\boxed{A \text{ iniettivo}} \iff \ker A = \{0\} \iff \dim \ker A = 0$

$$\dim X = \dim A(X)$$

Siccome $A(X) \subseteq Y$ ed ha uguale dimensione

$A(X) = Y$ e quindi $\boxed{A \text{ è suriettivo}}$

A è surjective, allora $A(X) = Y \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim A(X) = \dim Y \underset{\text{Hp}}{=} \dim X$

$$\dim X = \dim \ker A + \dim A(X)$$

uguali

$\Rightarrow \boxed{\dim \ker A = 0}$

$\Rightarrow A$ è iniettiva

A iniettiva $\iff \operatorname{Ker} A = \{0\}$

C.N

A iniettiva $\Rightarrow A(x) = A(y) \Rightarrow x = y$

$x \in \operatorname{Ker} A \iff A(x) = 0$

$A(0) = 0$

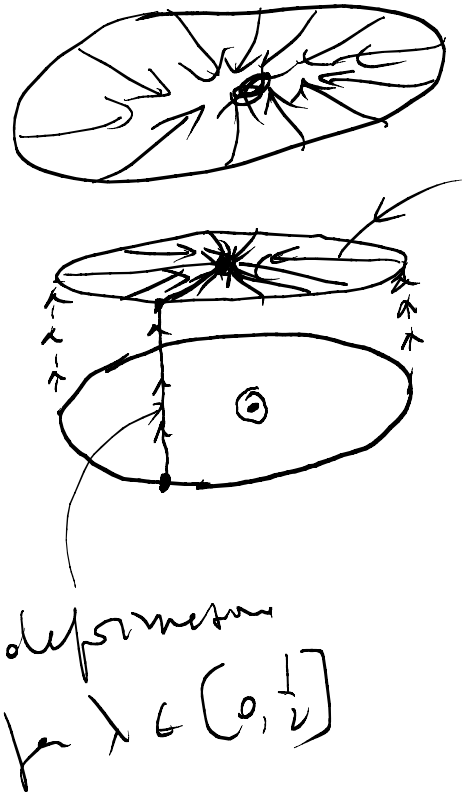
Ipotesi $\Rightarrow x = 0$ unico punto del Ker

C.S. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

$A(x) = A(y) \iff A(x) - A(y) = 0$

$A(x-y) = 0$

$x - y \in \operatorname{Ker} A \Leftarrow x - y = 0 \Leftarrow x = y$



$\lambda \in [0,1]$

$[0, 1/2]$

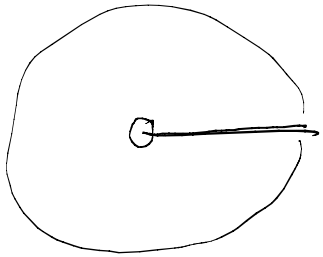
$[\frac{1}{2}, 1]$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$y>0$

$x^2+y^2\le 1$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$



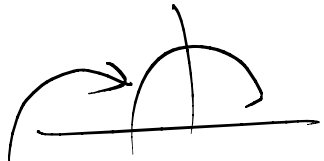
$0\le x^2+y^2\le 1$

$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$

$y>0$

$\rho\sin\theta>0$

>0 $\Downarrow$ $\sin\theta>0$

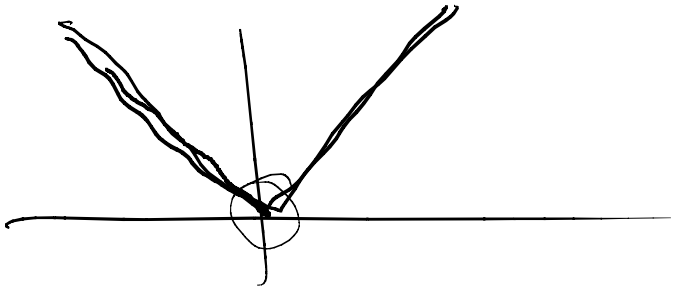


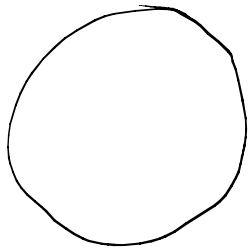
$[0,\pi]$

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{f}\,\underbrace{\rho}_{\text{jacobiano}}\,d\rho =$$

$= \pi$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$





$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ |t|^3 \end{pmatrix}$$

$s = t^3 = g(t)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{|t|^3 - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \cdot \frac{|t|^3}{|t|} = 0$$

limitata $\cdot$ infinitesimo

$|t| = \sqrt{t^2}$

$\sqrt{t^4} = t^2$ derivabile

$\sqrt{t^{10}} = |t|^5$

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_{x_1} \\ \nabla f_{x_2} \\ \vdots \\ \nabla f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Matrice hessienne

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) = f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j}$$

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$\phi_u(u_0, v_0)$ è tangente alla superficie in $\phi(u_0, v_0)$

$\phi_v(u_0, v_0)$ " " " in $\phi(u_0, v_0)$

$$\gamma = \underbrace{\phi_u \times \phi_v}_{= (u_0, v_0)}$$ è normale alla superficie in $\phi(u_0, v_0)$

$$N(u_0, v_0) = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0) = (a, b, c) \qquad \phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ eq. implicita p. tangente