Note Title 4/21/2021

$$f(x_0+w)-f(x_0)=\cancel{f'(x_0)w}+\underbrace{\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\,w_i w_j}_{f''(x_0)}+o(|w|^2)=$$

$f'(x_0)$

perché $f'(x_0)=\nabla f(x_0)=0$

$f\in C^2$ → Th. Clairaut Schwarz → è simmetrica

$$=|w|^2\left[\frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\,w_i w_j}{|w|^2}+\frac{o(|w|^2)}{|w|^2}\right]$$

$|w|^2\geq 0$

$\frac{\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\,w_i w_j}{|w|^2}\to 0$ ← 0-omogenea

$\frac{o(|w|^2)}{|w|^2}\to 0$ per $w\to 0$

0

$(*)$

$$\lambda |w|^2 \leq \sum_{1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\, w_i w_j \leq \Lambda |w|^2$$

forma quadratica hessiana

$w \neq 0$

$$\lambda \leq \frac{\sum_{1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\, w_i w_j}{|w|^2} \leq \Lambda$$

λ: minimo autovalore della matrice hessiana $\left(f_{x_i x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$

Λ: max autovalore

$\lambda > 0 \iff$ l'hessiana è definita positiva, da (*) segue

$$f(x_0+tw) - f(x_0) \geq |w|^2 \left[\frac{1}{2}\lambda + \frac{o(|w|^2)}{|w|^2} \right]$$

≥ 0 ; $\frac{1}{2}\lambda > 0$; $\frac{o(|w|^2)}{|w|^2} \to 0$

$[\ ] > 0$ per $|w| < \delta$

x_0 di MIN relativo

$\Lambda < 0$ hessiana def. negativa

$$f(x_0+w)-f(x_0) = |w|^2\left[\frac{1}{2}\frac{\sum f_{x_i x_j}(x_0)\, w_i w_j}{|w|^2} + \frac{o(|w|^2)}{|w|^2}\right] \leq$$

$$\leq |w|^2\left[\frac{\wedge}{2} + \frac{o(|w|^2)}{|w|^2}\right]$$

$$\downarrow \frac{\wedge}{2} < 0 \Rightarrow [\ ] < 0 \quad \text{per } |w| < \delta$$

$\Rightarrow$ x_0 è di MASSIMO LOCALE

$\lambda < 0$ e $\Lambda > 0$ sugli autovettori di λ

la forma è negativa stretta

su quelli di Λ la forma

è positiva stretta.

$$f(x_0+w) - f(x_0) = \left[\frac{1}{2} \frac{\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{o(|w|^2)}{|w|^2} \right] |w|^2$$

λ sul suo autospazio

Λ sul suo autospazio

$\frac{o(|w|^2)}{|w|^2} \to 0$

$\exists \delta : |w| < \delta$

$$\left| \frac{o(|w|^2)}{|w|^2} \right| < \min\left\{ \frac{|\lambda|}{2}, \frac{\Lambda}{2} \right\} + \varepsilon$$

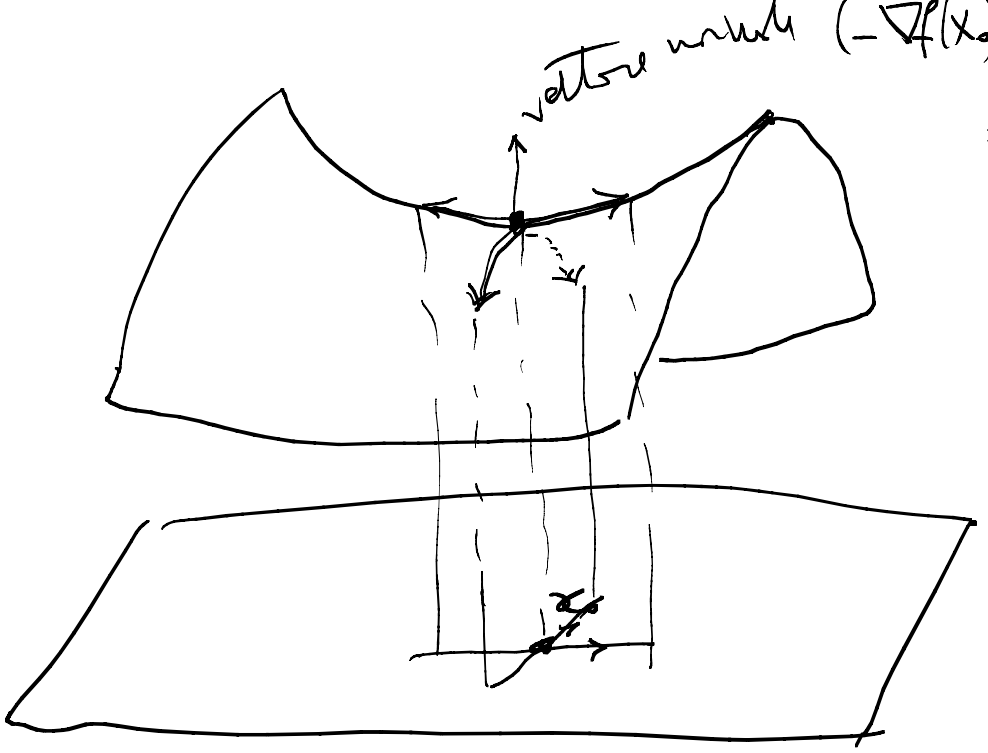
per $|w| < \delta$

[ ] avrà il segno < 0 sull'autosp. di λ

> 0 " " di Λ

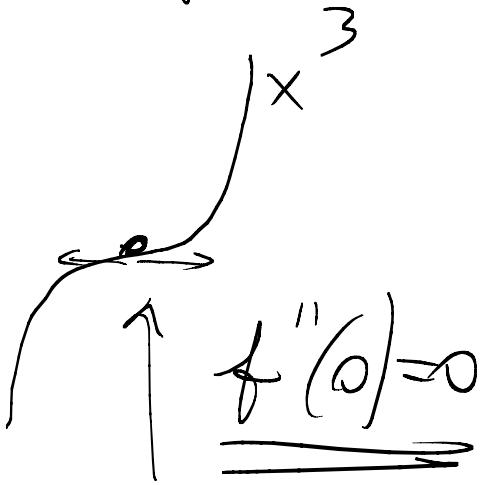
x_0 non è né di max né di min perché il I membro cambia segno, assumendo segni discordi agli autospazi di λ e Λ.

x_0 **PUNTO DI SELLA** (non degenere)



$x^2 - y^2$

xy



$\lambda = 0$ oppure $\Lambda = 0$ hessiana semidefinita

⇓

HESSIANA DEGENERE

punto critico degenere

$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 \quad \forall (x,y)$

$f_x = 2x \qquad f_y = 4y^3 \qquad \nabla f = 0$ solo in $(0,0)$

$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0 \qquad f_{yy} = 12y^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

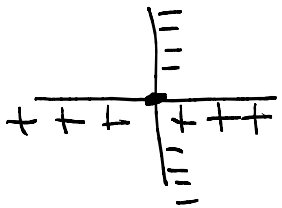
è già diagonale ed ha autovalori $2, 0$ SEMI D. > 0

(0,0) punto di MINIMO GLOBALE dell'esame diretto di f.

$$f(x,y) = x^2 - y^4$$

sull'asse x $(f(x,0))$ $f \geq 0$

sull'asse y $(f(0,y))$ $f \leq 0$

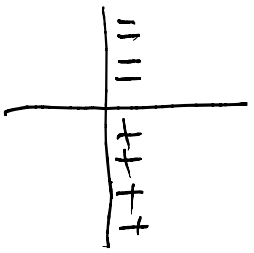


$f_x = 2x \quad f_y = -4y^3 \quad \nabla f = 0$ solo in $(0,0)$

$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = -12y^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

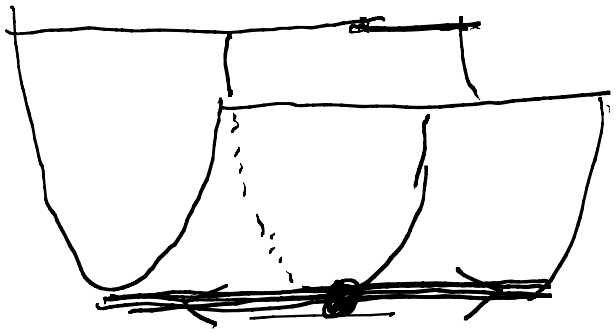
$f(x,y) = x^2 - y^3$



dominio di f

hessiana in $(0,0)$ è sempre

sempre $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



CHE SEGNO AVRÀ $o(|w|^2)$?

NESSUNO LO SA!

$f : [a,b] \cup [c,d] \to \mathbb{R}$

Estremi globali

$f(x)=x$ su $[0,1]$

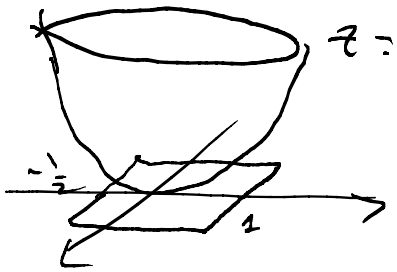
0 è di minimo globale

1 è di massimo globale

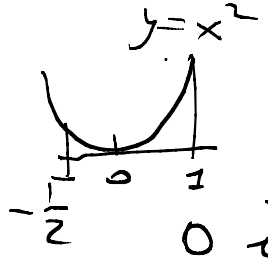
$f' \equiv 1$

(1) Si cercano gli estremi interni risolvendo $f'(x)=0$

(2) Si calcolano $f(a), f(b), f(c), f(d)$



il bordo di $\left[-\frac{1}{2},1\right] \times \left[-\frac{1}{2},1\right]$ ha infiniti punti



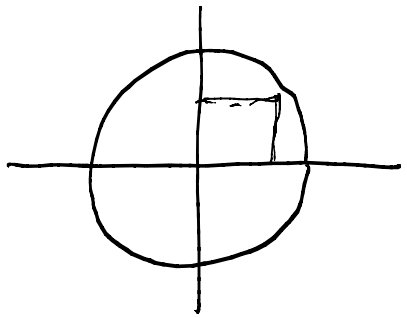
$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

0 è di minimo

1 è di massimo

$f(x,y) = xy$ estremi globali su $\{x^2+y^2 \le 1\}$

$B_1((0,0))$

$\mathrm{dom} f =$ 

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $x=0$ $y=0$

$(0,0)$ è un punto critico interno al dominio.

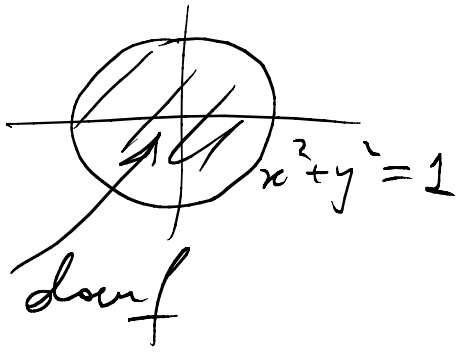
$f(0,0)$

$f_x = y \quad f_y = x \quad f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 0$

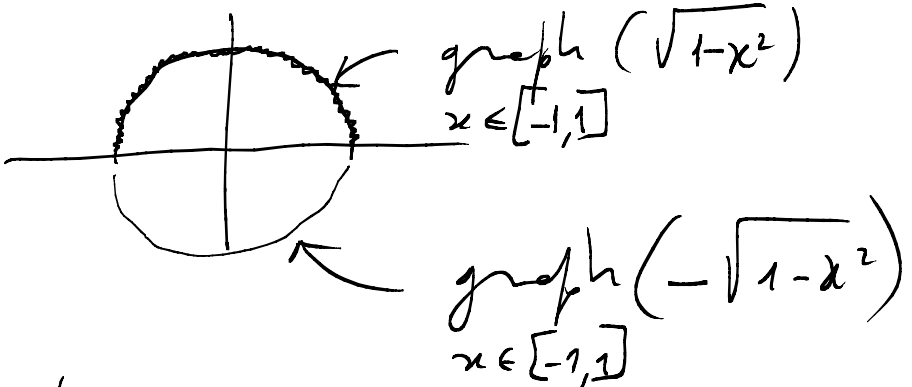
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{matrix}$ forma è indef. SELLA NON DEGEN.

Per studiare la restrizione di f sul bordo

$$x^2 + y^2 = 1$$



1ª) strategia

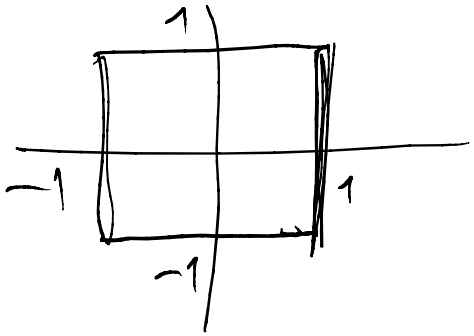


Allora basterà studiare

$$x \longrightarrow f\left(x, \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\in \text{graph}\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \text{su } [-1,1]$$

lo stesso per $f(x, -\sqrt{1-x^2})$

SONO FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE



$$\text{Bordo} =$$

$$= \{(1,y) : y \in [-1,1]\} \cup$$

$$\cup \{(x,1) : x \in [-1,1]\} \cup$$

$$\cup \{(-1,y) : y \in [-1,1]\} \cup$$

$$\cup \{(x,-1) : x \in [-1,1]\}$$

2ª) Strategia $x^2+y^2=1$ è il sostegno (immagine) della curva parametrica

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si studia allora $t \to f(\gamma(t))$ su $[a,b] = [0, 2\pi]$

$$t \to f(\underbrace{\cos t, \sin t}_{\gamma(t)}) = \underbrace{\cos t}_{x} \underbrace{\sin t}_{y} \quad \text{su } [0, 2\pi]$$

UNA SOLA VARIABILE t $\boxed{\text{tecniche di Analisi 1}}$