Note Title 4/9/2021

f è LINEARE $\left(f(x+y) = f(x) + f(y) \; ; \; f(\lambda x) = \lambda f(x) \right)$

$df(x_0, w) = f(w)$

$f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) = a$

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0 + w) - f(x_0) - f(w)}{|w|} \stackrel{?}{=} 0$$

Il numeratore è identicamente nullo perché f è lineare

$$\boxed{df = \sum_1^N \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i}$$

$$\approx$$

$$df(x_0, w) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i(w)$$

$\boxed{\Pi_i(w) = w_i}$ è lineare

$$\underline{d\Pi_i(x_0, w) = w_i}$$

$$\underline{\underline{df(x_0, w) = \nabla f(x_0) w = \sum_1^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) w_i =}}$$

$$= \sum_1^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, d\Pi_i(w)$$

$d\Pi_i \equiv dx_i$ se $f(x) = x_i$

$$df = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

---

(1) f è continua in x_0? Se non lo è, NON È DIFFEREN.

(2) f ha tutte le derivate parziali in x_0? Se no, NON È DIFFER.

(3) Se f ha tutte le derivate parziali è vero che

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - \underbrace{\nabla f(x_0) w}_{A(w)}}{|w|} = 0 ?$$

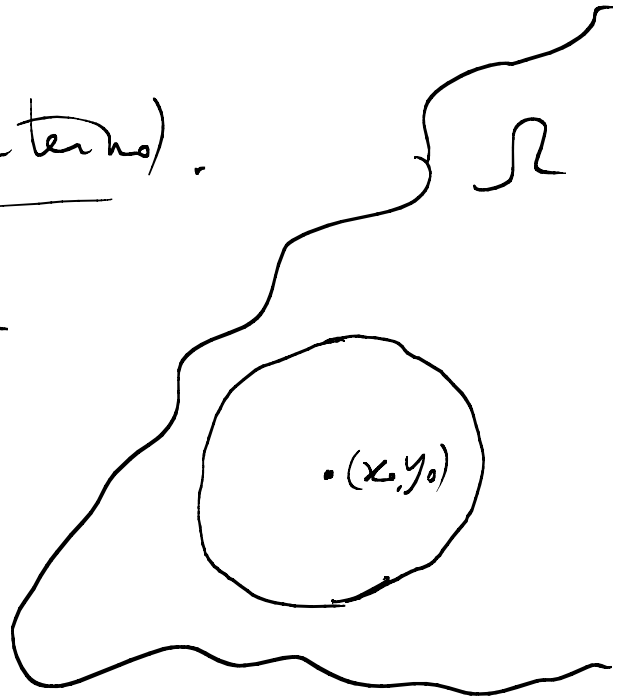
SE SÌ, È DIFFER.; SE NO, NON È DIFFER.

Teorema del differenziale (totale)

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. 1) Sia $x_0 \in \mathring{\Omega}$ (interno). ?

2) Esistono e sono continue f_{x_i} in $\mathring{\Omega}$

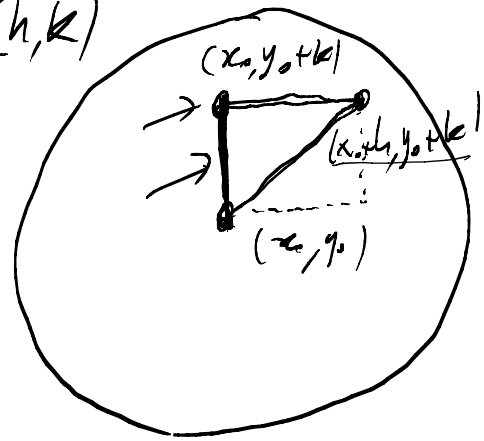
$f \in C^1(\Omega)$



Allora f è diff. in x_0

DIM. (2 variabili)

$w = (h, k)$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) =$$

$$= \underbrace{[(x_0+h) - x_0]}_{h} f_x(\xi, y_0+k)$$

th. Lagrange su $[x_0, x_0+h]$ applicato alla funzione $t \to f(t, y_0+k)$ la cui derivata è $f_x(t, y_0+k)$

$$f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{[(y_0+k) - y_0]}_{k} f_y(x_0, \eta)$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0+k)\, h + f_y(x_0, \eta)\, k$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_x(\xi, y_0+k)\,h + f_y(x_0,\eta)\,k - f_x(x_0,y_0)\,h - f_y(x_0,y_0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \left[f_x(\xi, y_0+k) - f_x(x_0,y_0) \right] +$$

$$+ \lim_{(0,0)} \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \left[f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0) \right] =$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1 \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1$$

$(h,k)\to(0,0)$

$x_0 < \xi < x_0+h \to x_0$

$y_0 < \eta < y_0+k \to y_0$

$(x_0,\eta)\to(x_0,y_0)$

$\xi \to x_0,\ \eta \to y_0 \Rightarrow (\xi, y_0+k)\to(x_0,y_0)$

Ne segue che i termini in parentesi quadra sono infinitesimi (perché continuità di f_x ed f_y) e sono moltiplicati per termini limitati $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

da cui il limite è NULLO

$\cos x^2 y$ in $(1,2)$ è diff.? Sì perché

$f_x = [-\sin(x^2 y)] 2xy$ $\quad f_y = [-\sin x^2 y]\, x^2$ e sono continue diff.