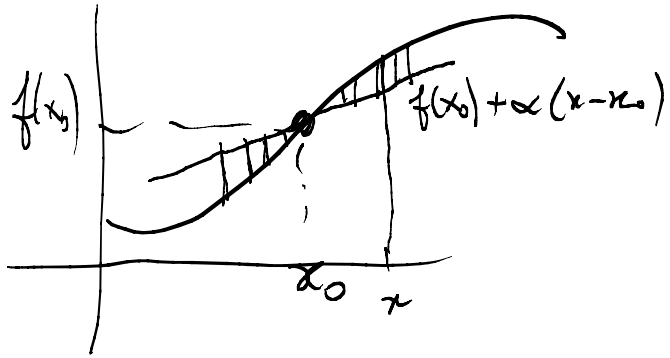
Note Title 3/31/2021

FUNZIONI DIFFERENZIABILI

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0)}{w} \qquad f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \quad N > 1$$

inutili l'uguale per f: vettori $\to$ scalari

Retta tang. ad un grafico per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0) = g(x)$$

$$g(x_0) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left[f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha \underset{\text{se } f \text{ è deriv. in } x_0}{=} f'(x_0) - \alpha$$

$f'(x_0) \neq \alpha$ $\quad f(x) - g(x) \doteq O(x-x_0)$ $\quad \exists \neq 0$ se $\alpha \neq f'(x_0)$

$f'(x_0) = \alpha$ $\quad f(x) - g(x) \doteq o(x-x_0)$ $\quad 0$ $\quad \alpha = f'(x_0)$

$z = f(x,y)$ $\quad \underline{\underline{(x_0, y_0)}}$ $\quad (x_0, y_0, z_0) \equiv (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in$ grafico f

$$z = g(x,y) = f(x_0,y_0) + \boxed{\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0)} \longrightarrow$$ approssimazione lineare da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

α, β "giusti" ?

DEF. $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \Omega$

f si dirà DIFFERENZIABILE in x_0

se $\exists\, A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ LINEARE tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

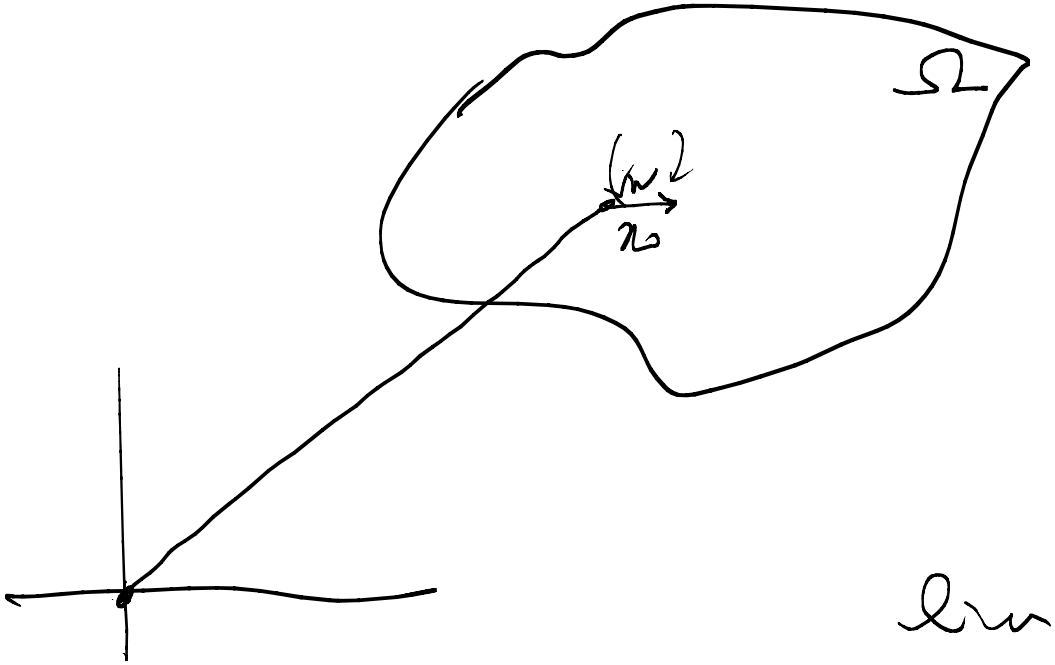
$w = x - x_0$

$x = x_0 + w$

$A(w) = \alpha w =$

$= \alpha (x - x_0)$

NOTA: se f è diff. $\Rightarrow \lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} = 0$



$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|}$$

w rettore che si può sommare a x_0, $\Rightarrow w \in \mathbb{R}^N$

$\boxed{\text{Th 1 Il differenziale (se esiste) è unico.}}$

DIM A, B lineari su $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} = 0$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - B(w)}{|w|} = 0$$

Sottraendo si ottiene

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|} \left[B(w) - A(w) \right] = 0$$

Essendo B ed A lineari sono 1-omogenei

$$\frac{A(tx) = tA(x)}{B(tx) = tB(x)}$$

$$B(tx) - A(tx) = t[B(x) - A(x)]$$

$\Downarrow$ B − A è 1-omogenea

$\Downarrow$ $\boxed{\dfrac{B(w) - A(w)}{|w|} \text{ è } 0 \text{ omog.}}$

$$\lim_{w \to 0} \frac{B(w) - A(w)}{|w|} = 0 \Longrightarrow \frac{B(w) - A(w)}{|w|} \text{ è costante}$$

$$\frac{B(w) - A(w)}{|w|} \equiv 0 \Longrightarrow B(w) - A(w) \equiv 0$$

Th. Se f è diff. in x_0 è continua in x_0.

DIM. La tesi è provata se $\lim_{w \to 0} \left[f(\underbrace{x_0+w}_{x}) - f(x_0) \right] = 0$

$(x - x_0)$

$$f(x_0+w) - f(x_0) = f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) + A(w)$$

$$f(x_0+w) - f(x_0) = f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) + A(w) =$$

$$= \underbrace{|w|}_{\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|}}_{\to 0 \text{ ipot. diff.}} + \underbrace{A(w)}_{= aw \quad a \in \mathbb{R}^N} \to 0$$

$$aw = \underbrace{\sum a_i w_i}_{\to 0} \qquad w \to 0, \quad w_i \to 0 \ \forall i$$

se $w \to 0$

$\boxed{AN\_2.2}$

Th Se f è differenziabile in x_0 allora f ha tutte le derivate direzionali e inoltre

$$f_v(x_0) = \underline{\underline{A(v)}} \qquad \underline{v \neq 0}$$

DIM. Per provare la tesi occorre verificare che

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} = A(v) \qquad \text{equivale a}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - tA(v)}{t} = 0$$

$\boxed{\text{dovrò fare } w = tv}$

Poiché A è lineare ciò equivale a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)}{t} = 0$$

equivale a (se una funzione è infinitesima lo è anche il suo modulo)

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|t|} = 0$$

che equivale ancora a

$$\lim_{t \to 0} |v| \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|t||v|} = 0$$

Tale limite è corretto perché

$$\frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|tv|}$$

è funzione composta di

$$w = tv \qquad \left(\underset{\text{in } \mathbb{R}}{t \to 0} \Rightarrow \underset{\text{in } \mathbb{R}^N}{w \to 0} \right)$$

(la parte interna)

e $\boxed{\dfrac{f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)}{|w|}} \xrightarrow{\text{perché } f \text{ è diff}} 0$ (la parte esterna)

NON È DEFINITA IN $\underline{\underline{w=0}}$

$$f(x) = x$$

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \underset{x \neq x_0}{=} 1$$

$$\frac{x - x_0}{|x - x_0|} \longrightarrow \text{oscilla}$$

f diff in x_0, A il suo diff.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_v(x_0) = A(v)} = A\left(\sum_1^N v_i e_i\right) = \sum_1^N v_i \underbrace{A(e_i)}$$

$$\longrightarrow \quad A(e_i) = f_{e_i}(x_0) = \text{derivata parziale di } f \text{ nella direzione di } x_i$$

$$= \underbrace{f_{x_i}(x_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \equiv \partial_{x_i} f(x_0)}.$$

$$\Downarrow$$

$$A(v) = \sum_1^N v_i f_{x_i}(x_0) \qquad (*)$$

nabla $\nabla f(x_0) = \left(f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_N}(x_0) \right)$

$\boxed{f'(x_0)}$ è un sinonimo di $\nabla f(x_0)$

GRADIENTE O PURE DERIVATA DI f

sostituendo in $(*)$

$$\longrightarrow \quad A(v) = \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\in \mathbb{R}^N} \cdot \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^N}$$

prodotto scalare

in 1 variabile $A(v) = f'(x_0) \cdot v$

prodotto di numeri

SI DENOTERA CON $A(w) = \boxed{df(x_0, w)}$

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} = 0$$

$\boxed{df}$

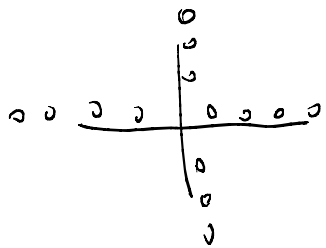
$$\boxed{df : \underset{\substack{\parallel \\ \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^N}}{\overset{x_0}{\Omega}} \times \overset{w}{\mathbb{R}^N} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

LINEARE RISPETTO a w, fissato x_0

$f(x,y) = |xy|$ $\quad (0,0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$\downarrow$ cost. 0



$f(h,0) \equiv 0$

$f(0,0) = 0$

$\Longleftarrow$ $f_x(0,0) = 0$

Lo stesso per $f_y(0,0) = 0$ $\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

ne segue che $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) =$

$$= (0,0)$$

Il CANDIDATO differenziale è $\nabla f(0,0)\cdot v =$

$$= 0v_1 + 0v_2 \equiv 0$$

f sarà diff. in $(0,0)$ se e solo se $w = (h,k)$

$$\longrightarrow \lim_{w\to 0} \frac{\overbrace{f(0+h,0+k)}^{f((0,0)+(h,k))} - f(0,0) - \overbrace{0\cdot h - 0\cdot k}^{\text{"}df\text{"}((0,0),(h,k))}}{\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{|w|}} \overset{?}{=} 0 \,?$$

$$f(0+h, 0+k) = |hk| \qquad f(0,0) = |0\cdot 0| = 0$$

$$\text{"}df\text{"}((0,0),(h,k)) = 0h + 0k = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk| \to 2\text{-omogenea}}{\sqrt{h^2+k^2} \to 1\text{-omog.}} = 0$$

1-omog. continua e limitata su $\sqrt{x^2+y^2} = 1$