Note Title 3/24/2021

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1-\cos(x^2)}{(x^2)^2} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1-\cos(x^2)}{(x^2)^2} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^4}{x^2} \to 0$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} \to 1$$

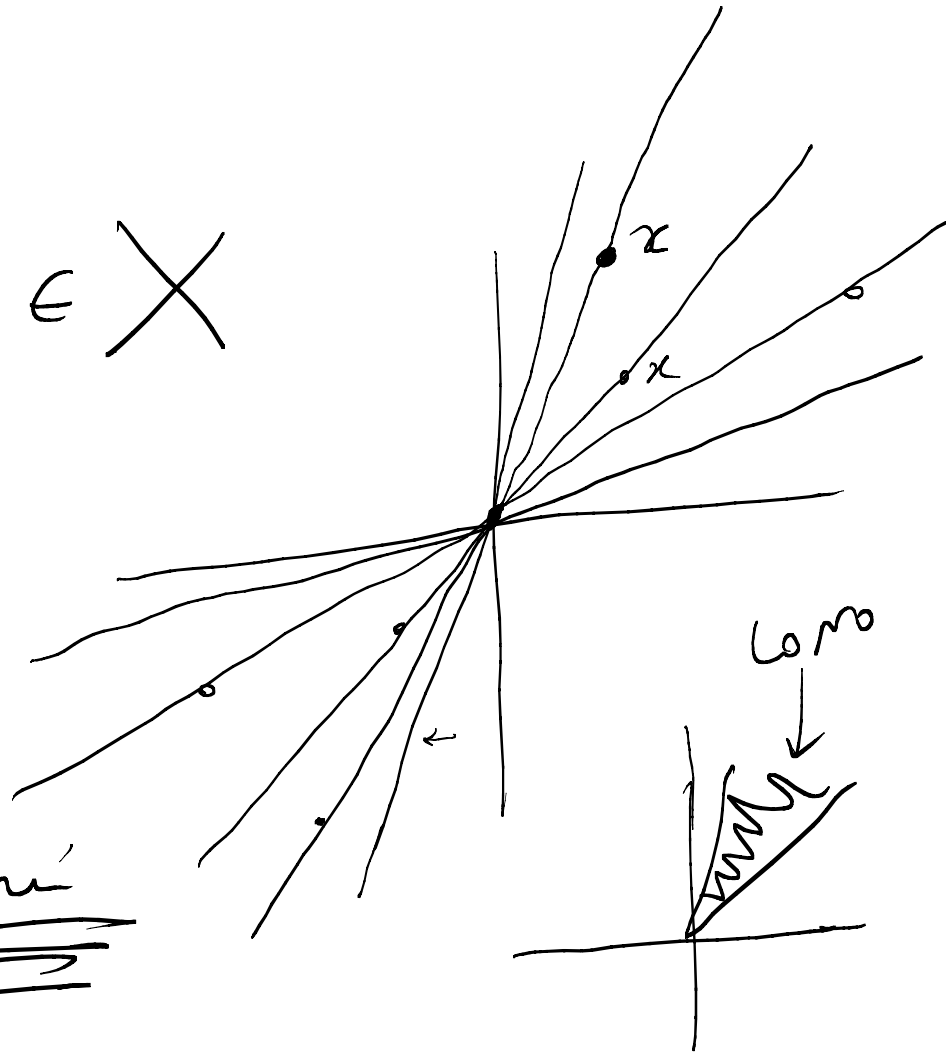
$$\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

CONO

FUNZIONE OMOGENEA SU UN CONO

$X \subseteq \mathbb{R}^N$ sarà detto <u>CONO</u>

$\forall x \in X \quad \forall t > 0 \quad tx \in X$



X è CONO se contiene tutta la semiretta uscente dall'origine e passante per ogni suo punto (origine esclusa)

$f: X \to \mathbb{R}$, X cono è α-omogenea

(positivamente omogenea di grado α)

se

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x)$$

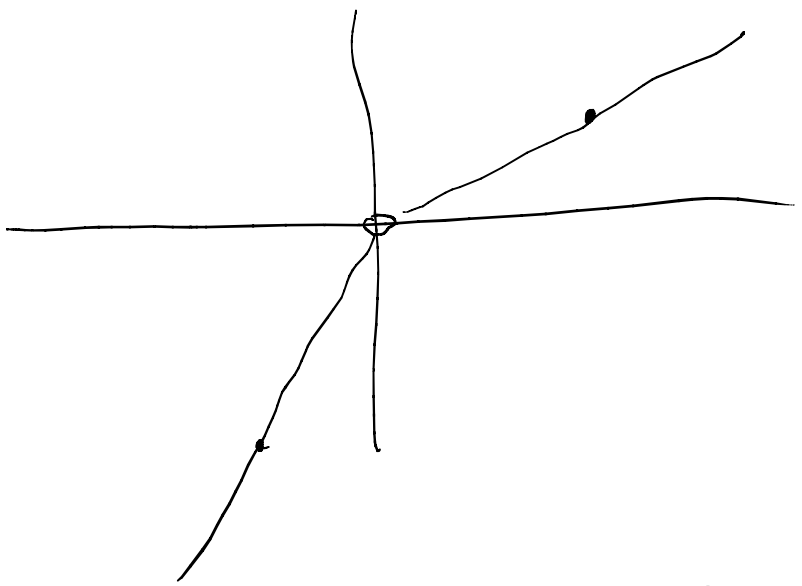
$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ è 2-omogenea

$$f(t(x,y)) = f(tx, ty) = t^2x^2 + t^2y^2 + t^2xy = t^2 f(x,y)$$

(α = 2)

$f(x,y) = \sin \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ è definita in $x^2+y^2 \neq 0$

$(x,y) \neq (0,0)$



$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = g(x,y)$$

$$g(tx,ty) = \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2x^2+t^2y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= g(x,y)$$

$f(tx,ty) = \sin g(tx,ty) \equiv \sin g(x,y) = f(x,y)$

0-omogenea t^0

grado di omogeneità $t^0 g(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} \leftarrow$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^3 x^2 y}{t^2 y^2 + t^4 x^4} =$$

$$\overset{t \neq 0}{=} \frac{t x^2 y}{y^2 + t^2 x^4} \; ? \; f(x,y)$$

$\sin(x^2+y^2) = f(x,y)$

$f(tx, ty) = \sin(t^2(x^2+y^2))$ NON È OMOGENEA

Se f e g sono α-omog. e β-omog. rispett.

allora $f \cdot g$ è $(\alpha+\beta)$ omogenea e $\frac{f}{g}$ (ove definita) è $\alpha-\beta$ omog.

$$\underbrace{f(tx)}_{\alpha\text{-omog.}}\underbrace{g(tx)}_{\beta\text{-omog.}} = t^{\alpha} f(x)\, t^{\beta} g(x) = \left| x \in X \subseteq \mathbb{R}^N \right.$$

$$= t^{\alpha+\beta} f(x) g(x)$$

$$\frac{f(tx)}{g(tx)} = \frac{t^{\alpha} f(x)}{t^{\beta} g(x)} = t^{\alpha-\beta} \frac{f(x)}{g(x)} \left| \right.$$

f α-omog. $\quad \underline{f^{\beta}(x)}$ $\quad f^{\beta}(tx) = [f(tx)]^{\beta} =$

$$= [t^{\alpha} f(x)]^{\beta} = t^{\alpha\beta} f^{\beta}(x)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{1/2}$$

2-omog.

$2 \cdot \frac{1}{2}$ omog.

$\Rightarrow$ 1 omog

$\rightarrow \sqrt[3]{x^2+xy+y^2}$ è $\frac{2}{3}$-omog.

2-omog.

grado 2 = $1+1$

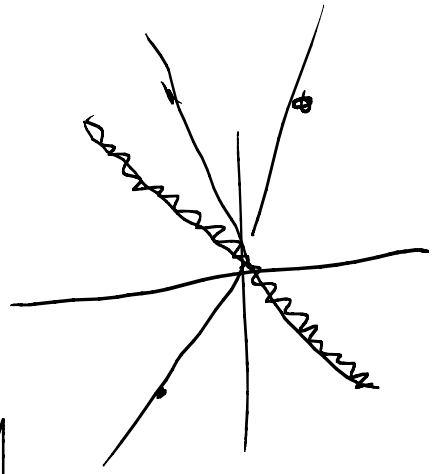
x grado 1

$\frac{x^2-y^2}{x+y}$

grado $1 = 2-1$ rapporto di omogenei di grado 2 e omogenei di grado 1

$x \neq -y$

$\omega \neq 0$



$$\boxed{\frac{x^3}{x^2} \underset{x\neq 0}{\equiv} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

Lemma $f : X \to \mathbb{R}$, α-omogenea $\alpha > 0$,

$$\boxed{f \text{ sia limitata su } X \cap B_1(0)}$$

Allora $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$$\boxed{f(t\,y) = t^\alpha f(y)}$$

DIM

$$f(x) = f\Big(\underbrace{|x|}_{\text{misura di } x}\underbrace{\frac{x}{|x|}}_{\text{versore di } x}\Big) \overset{x\neq 0}{=} \underbrace{|x|^\alpha}_{\text{infinit.}} f\Big(\underbrace{\frac{x}{|x|}}_{\in \mathcal{F}B_1(0)}\Big)$$

$$0 \le |f(x)| = |x|^\alpha \underbrace{\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|}_{\le k} \le k|x|^\alpha$$

$\le k$ perché f è limitata in $\mathrm{dom} f \cap \mathcal{F}B_1(0)$

0

$\lim_0 |x|^\alpha = 0$ perché

$|x|^\alpha$ è composta di $x \xrightarrow{f} |x|$ $\quad x \to 0$, $|x| \to 0 = L$

$\lim_0 |x|^\alpha \overset{t=|x|}{=} \lim_{t \to 0^+} t^\alpha = 0$ $\quad \leftarrow \quad g(t) = t^\alpha$ è continua dappertutto

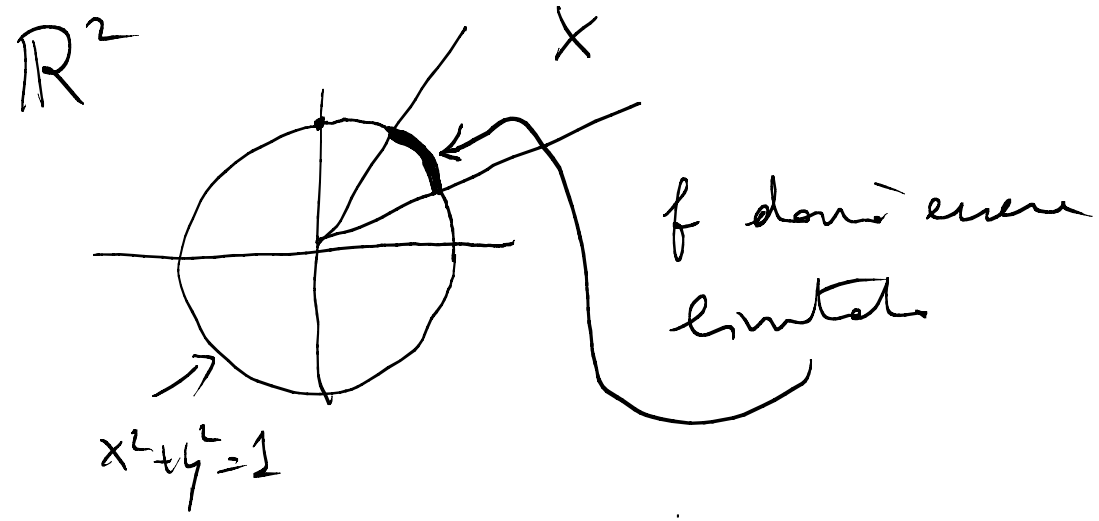
$$f(x,y) \quad \frac{x^3 - x^2 y}{x^2+2y^2} \quad \begin{matrix} 3\text{-omog.} \\ \\ 2\text{-omog} \end{matrix} \Big) \; \underline{1}\text{-omog.} \qquad \text{def.} \quad x^2+2y^2 \neq 0$$

$$(x,y) \neq (0,0)$$

Perché $f(x,y)$ è limitata su $B_1(0)$?

f è rapporto di funzioni continue $x^3 - x^2 y$ e x^2+2y^2, il cui denominatore (x^2+2y^2) non si annulla <u>mai</u> su $\{\underbrace{|(x,y)|=1}_{x^2+y^2=1}\}$ ed è quindi continuo su un compatto $\{x^2+y^2=1\}$

Per il th. del massimo f è limitata

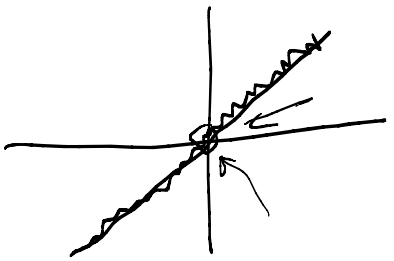


$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

2-omog.

1-omog

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$$



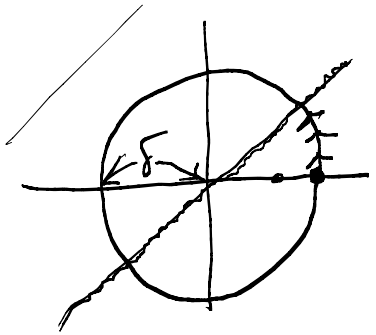
$(0,0)$ è di acc. per X

f è $(2-1)$ - omogenea

f è infinitesima in $(0,0)$?

Le lo form $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |(x,y)| < \delta$

$(x,y) \neq (0,0) \quad x \neq y \quad |f(x,y)| < \varepsilon$



$x^2+y^2 = \delta^2$

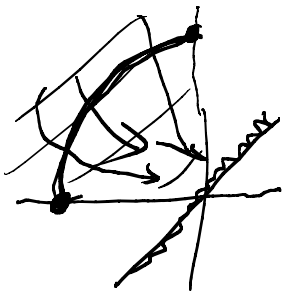
$x-y \to 0$

$\left(\frac{\delta}{2}\cos\theta , \frac{\delta}{2}\sin\theta\right)$

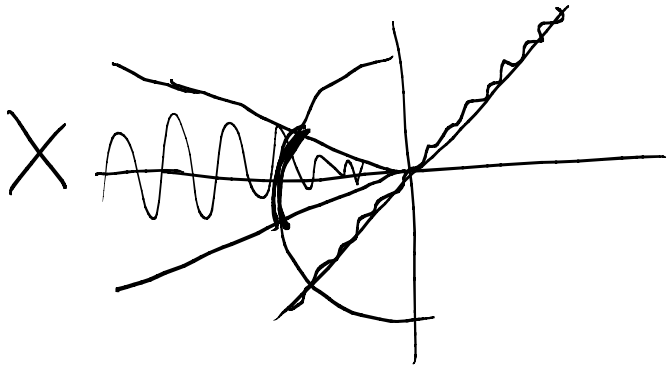
$\theta \to \frac{\pi}{4}$

$\frac{\delta^2/4}{\frac{\delta}{2}(\cos\theta - \sin\theta)}$

$\frac{x^2+y^2}{x-y}$ ristretta al II quadrante $(x<0 \quad y>0)$



$\lim_{(x,y)\to 0 \text{ in } X} f(x,y) = 0$ $\quad f$ è limitata su $X \cap \{|(x,y)|=1\}$



$1-\cos t = O(t^2)$

$\sin t = O(t)$

$\sin \boxed{x^3}$

$1-\cos \boxed{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^3}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{1}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\sin x^3}{x^3} \cdot x^3 \uparrow$$

$$\frac{\sin x^3}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} \overset{x\neq 0}{=\!=} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \boxed{\frac{x^3}{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2+y^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\frac{\sin t}{t}$ dove $\frac{1-\cos t}{t^2}$ non definita per $t=0$

$\frac{\sin x^3}{x^3} \to 1$

$\boxed{\frac{x^3}{x^2+y^2}}$ 1-omogenea nel dominio $\{(x,y)\neq(0,0)\}$

$\frac{x^2+y^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} \to 2$

$\boxed{\dfrac{x^3}{x^2+y^2}}$ è 1-omogenea, continua, ovunque definita su

$$\{x^2+y^2=1\} = \operatorname{dom} \frac{x^3}{x^2+y^2} \cap \{x^2+y^2=1\}$$

ne segue che $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

da cui $\displaystyle\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$

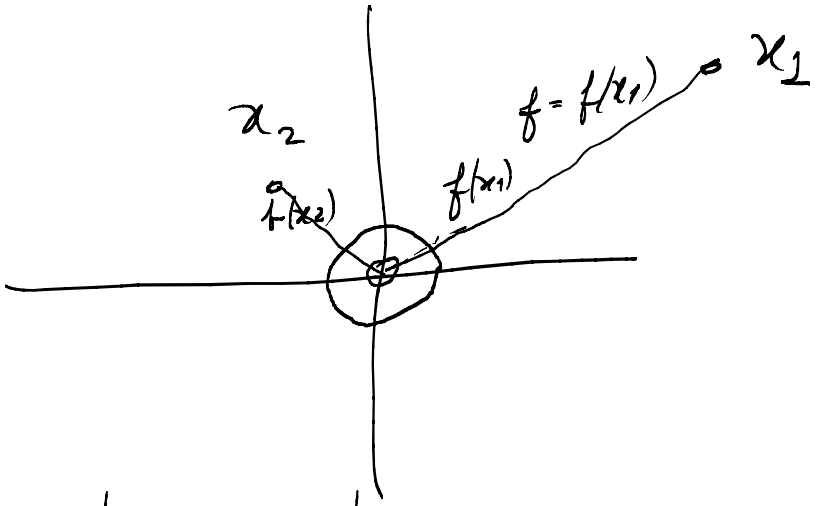
<u>Lemma</u> Una funzione 0-omogenea NON COSTANTE OSCILLA.

DIM. Se f è NON COSTANTE

$\exists\, x_1, x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$

$$f(t x_1) \overset{t>0}{=} t^0 f(x_1) = f(x_1)$$

$$f(t x_2) = t^0 f(x_2) = f(x_2)$$



f sarà costante sui "raggi" tx_1 e tx_2 con valori diversi. Ma $\lim_{(0,0)} \dfrac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2} \equiv 2$ $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+2y^2} =$$

$1-\cos t \approx t^2$ $\quad t=\sqrt{x^2+y^2}$

0-omog. $\Leftrightarrow$ costante sui "raggi" uscenti dall'Orig

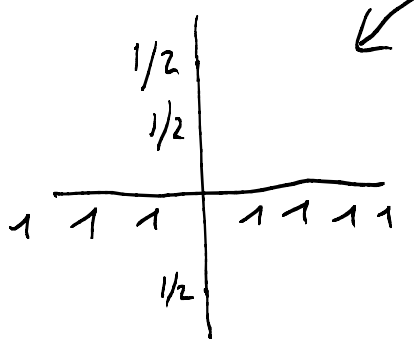
$$= \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}$$

$\frac{1}{2}$

0-omog. sul cono $\{(x,y)\neq(0,0)\}$

1 su $y=0$

$\frac{1}{2}$ su $x=0$



$$f(x,0) = \frac{1-\cos|x|}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

$$f(0,y) = \frac{1-\cos|y|}{2y^2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$